ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 4
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

ГЛАВА 5
ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

ГЛАВА 6
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ГЛАВА 7
АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО МАЛОМУ ПАРАМЕТРУ

ГЛАВА 8
УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Книга «Дифференциальные уравнения», являющаяся шестым выпуском серии «Курс высшей математики и математической физики», претерпела два издания: первое появилось в 1980 г., а второе — в 1985 г. Был сделан перевод на английский язык издательством «Шпрингер Ферлаг» в 1985 г.

Сейчас прошло уже более десяти лет со времени выхода в свет второго издания, и студенты вузов и университетов, для которых эта книга является одним из основных учебников, испытывают трудности в доступе к книге, поскольку количество экземпляров книги в библиотеках в силу естественных причин значительно сократилось. Поэтому мы приветствуем инициативу нового переиздания серии «Курс высшей математики и математической физики».

Настоящее издание стереотипное. Исправлены лишь некоторые опечатки, на которые в разное время обратили внимание читатели, за что авторы выражают им всем благодарность.

Конечно, в будущем, если дело дойдет до еще одного переиздания, придется внести ряд изменений, так как со времени подготовки второго, переработанного, издания в теории дифференциальных уравнений появились новые факты. С другой стороны, текст в его настоящем виде нам приятно сохранить как память о нашем учителе и соавторе Андрее Николаевне Тихонове, которого не стало в 1993 г.

Июнь 1998 г. *А. Б. Васильева, А. Г. Свешников*

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Второе издание курса «Дифференциальные уравнения» представляет собой существенно переработанный текст первого издания. Не меняя основного содержания курса, мы внесли значительные изменения в характер его изложения.

В новом издании изложение узловых положений курса строится на основе общих идей метода дифференциальных неравенств, базирующегося на теореме Чаплыгина. Этот метод наглядно выделяет идейную сторону доказываемых в курсе основных теорем существования и зависимости от параметров решения начальной задачи как для одного уравнения, так и для системы уравнений. При этом во многих случаях значительно снижаются технические трудности при доказательстве соответствующих теорем, а сами доказательства становятся более алгоритмичными.

На идейной основе метода дифференциальных неравенств построено также изложение рассматриваемых в книге вопросов численных и асимптотических методов решения дифференциальных уравнений. В главу о численных методах внесены, кроме того, значительные редакционные изменения в целях улучшения изложения с методической точки зрения.

Подвергся переработке и текст гл. 4, посвященной краевым задачам. Дано доказательство теоремы существования решения неоднородной краевой задачи. Более подробно разбирается понятие обобщенной функции Грина. Внесены некоторые изменения и в характер изложения задач на собственные значения.

Помимо этих основных изменений в текст книги внесено большое количество более локальных изменений для улучшения стиля изложения. Изменен и ряд обозначений.

Авторы выражают свою искреннюю благодарность Л. Д. Кудрявцеву, внимательно просмотревшему рукопись настоящего издания, а также всем лицам, приславшим свои замечания по первому изданию книги.

1985 г. *Авторы*

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемая книга представляет собой очередной выпуск серии «Курс высшей математики и математической физики» под редакцией А. Н. Тихонова, В. А. Ильина, А. Г. Свешникова.

В основу книги положен курс лекций, который в течение многих лет читается на физическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Изложение отвечает современному состоянию теории дифференциальных уравнений в той мере, как это требуется будущим специалистам по физике и прикладной математике, и в то же время достаточно элементарно.

Большое внимание уделяется в книге приближенным методам решения и исследования дифференциальных уравнений — численным и асимптотическим, которые в настоящее время лежат в основе изучения математических моделей физических явлений. Читатель получит представление о различных методах численного решения как начальных, так и краевых задач, о таких фундаментальных понятиях теории численных методов, как сходимость разностной схемы, аппроксимация и устойчивость. В главе, посвященной асимптотическим методам, содержатся, в частности, сведения из так называемой теории сингулярных возмущений (метод пограничных функций, метод ВБК, метод усреднения), которая бурно развивается в последние десятилетия в связи с потребностями таких разделов физики и техники, как теория автоматического регулирования, гидродинамика, квантовая механика, кинетика, теория нелинейных колебаний и др.

Рукопись книги была просмотрена Е.А.Гребениковым и Л.Д.Кудрявцевым, сделавшими ряд ценных замечаний. Неоценимую помощь в подготовке рукописи к печати оказал Б. И. Волков. Всем им авторы выражают свою искреннюю благодарность.

1980 г. *Авторы*

Г Л А В А 1

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Понятие дифференциального уравнения

В настоящей книге рассматриваются дифференциальные уравнения, т. е. соотношения между неизвестной функцией, ее производными и независимыми переменными. Уравнения, содержащие производные по многим независимым переменным, называются *уравнениями в частных производных.* Уравнения, содержащие производные лишь по одной из независимых переменных, называются *обыкновенными дифференциальными уравнениями.* Изучение свойств и методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений и составляет основное содержание данной книги, лишь последняя глава посвящена некоторым специальным классам уравнений в частных производных.

Независимую переменную, производная по которой входит в обыкновенное дифференциальное уравнение, обычно обозначают буквой x (или буквой t, поскольку во многих случаях роль независимой переменной играет время). Неизвестную функцию обозначают $y(x)$.

Обыкновенное дифференциальное уравнение можно записать в виде соотношения

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0. \tag{1.1}$$

В уравнение (1.1) помимо неизвестной функции, ее производных по независимому переменному x и самого независимого переменного x могут входить и дополнительные переменные $\mu_1, \ldots, \mu_k$. В этом случае говорят, что неизвестная функция зависит от переменных $\mu_1, \ldots, \mu_k$ как от параметров.

Порядок старшей производной, входящей в уравнение (1.1), называется *порядком уравнения.* Уравнение первого порядка имеет вид

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{1.2}$$

и связывает три переменные величины — неизвестную функцию, ее производную и независимую переменную. Часто это соотношение удается записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{1.3}$$

Уравнение (1.3) называется уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной. Изучение теории обыкновенных дифференциальных уравнений мы начнем с уравнения (1.3).

Наряду с дифференциальными уравнениями (1.1)–(1.3) для одной неизвестной функции в теории обыкновенных дифференциальных уравнений рассматриваются системы уравнений. Система уравнении первого порядка, разрешенных относительно производных

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.4}$$

называется *нормальной системой.* Вводя векторные функции

$$y = (y_1, \ldots, y_n), \quad f = (f_1, \ldots, f_n),$$

можем записать систему (1.4) в векторной форме

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{1.5}$$

Легко видеть, что уравнение n-го порядка (1.1), разрешенное относительно старшей производной

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\Big(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\Big), \tag{1.6}$$

может быть сведено к нормальной системе. Действительно, введем обозначения

$$y = y_1(x), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} = y_2(x), \quad \ldots, \quad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n(x). \tag{1.7}$$

Тогда, вследствие очевидного равенства $\dfrac{d^n y}{dx^n} = \dfrac{dy_n}{dx}$, уравнению (1.6) можно сопоставить нормальную систему

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} &= y_n, \\ \frac{dy_n}{dx} &= f(x, y_1, \ldots, y_n). \end{aligned} \tag{1.8}$$

В уравнениях (1.1)–(1.5) независимую переменную будем полагать действительной. Неизвестные функции могут быть как действительными, так и комплексными функциями действительной переменной.

Очевидно, если $y(x) = \bar{y}(x) + i\bar{\bar{y}}(x)$, где $\bar{y}(x)$ и $\bar{\bar{y}}(x)$ — соответственно действительная и мнимая части функции $y(x)$, уравнение (1.3) эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений для действительных функций:

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \mathrm{Re}\, f(x, \bar{y}, \bar{\bar{y}}), \quad \frac{d\bar{\bar{y}}}{dx} = \mathrm{Im}\, f(x, \bar{y}, \bar{\bar{y}}).$$

Решением системы дифференциальных уравнений (1.4) называется всякая совокупность функций $y_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$, которые при подстановке в уравнения обращают их в тождества. Как правило, и как это будет видно из последующих примеров (см. § 2), если дифференциальное уравнение разрешимо, то оно обладает бесчисленным множеством решений. Процесс нахождения решений называется *интегрированием дифференциального уравнения.*

Обычно рассматриваются системы (1.4) с правыми частями, непрерывными в некоторой области D изменения неизвестных функций y_i, и независимой переменной x. Очевидно, что при этом решения $y_i(x)$ представляют собой непрерывно дифференцируемые функции. Однако в приложениях иногда приходится иметь дело с уравнениями, правые части которых имеют разрывы (например, при описании ударных нагрузок, мгновенно приложенных сил и т. д.), поэтому и сами решения будут иметь разрывы производных. Тогда естественно в качестве решения (1.4) рассматривать непрерывные функции $y_i(x)$ с кусочно непрерывными производными. При подстановке в уравнения они дифференцируются всюду, за исключением точек разрыва (или отсутствия) производных. Такое решение естественно назвать *обобщенным решением.*

Всякое решение $y_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ системы (1.4) можно интерпретировать геометрически как кривую в $(n+1)$-мерном пространстве переменных $x, y_1, \ldots, y_n$, которая называется *интегральной кривой.* Подпространство переменных $y_1, \ldots, y_n$ называется *фазовым пространством*, а проекция интегральной кривой на фазовое пространство — *фазовой траекторией.*

Уравнения (1.4) определяют в каждой точке области D некоторое направление, задаваемое вектором $\tau = (1, f_1, \ldots, f_n)$. Такая область пространства с заданным в каждой точке направлением называется *полем направлений.* Интегрирование системы уравнений (1.4) геометрически интерпретируется как нахождение кривых, у которых направление касательной в каждой точке совпадает с направлением τ, заданным в данном поле направлений.

Как отмечалось выше, дифференциальное уравнение имеет, вообще говоря, бесчисленное множество решений. Поэтому, интегрируя систему (1.4), мы найдем бесчисленное множество интегральных кривых, лежащих в области определения правых частей системы (1.4). Чтобы из всей совокупности решений выделить отдельную интегральную кривую, представляющую собой так называемое *частное решение* системы (1.4), надо задать дополнительные условия. Во многих случаях такими дополнительными условиями являются начальные условия

$$y_i(x_0) = y_i^0, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1.9}$$

определяющие ту точку $(n+1)$-мерного пространства переменных $x, y_1, \ldots, y_n$, через которую проходит данная интегральная кривая.

Задача интегрирования системы (1.4) с начальными условиями (1.9) называется *начальной задачей* или *задачей Коши*.

В простейшем случае одного уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.10}$$

функция $f(x, y)$ определяет поле направлений в той области D плоскости (x, y), где задана правая часть (1.10). Это поле направлений в каждой точке области D задается вектором $\tau(x, y)$ с угловым коэффициентом $f(x, y)$ ($\operatorname{tg}\alpha = f(x, y)$) (рис. 1).

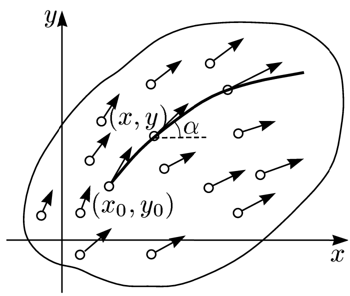

Рис. 1

Решение начальной задачи с заданным начальным условием $y(x_0) = y_0$ в этом случае заключается в построении в области D интегральной кривой $y = y(x)$, выходящей из начальной точки (x_0, y_0) и в каждой своей точке (x, y) касающейся вектора τ с угловым коэффициентом $f(x, y)$.

Приведенная выше геометрическая интерпретация поведения интегральных кривых делает наглядным доказательство следующей теоремы.

Т е о р е м а 1.1 (теорема Чаплыгина о дифференциальных неравенствах). *Если при* x $\in [x_0, X]$ *существует решение начальной задачи*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{1.11}$$

являющееся однозначной функцией x, *и если* $z(x)$ — *непрерывная и непрерывно дифференцируемая на* $[x_0, X]$ *функция такая, что*

$$\frac{dz}{dx} < f(x, z), \quad x \in [x_0, X], \quad z(x_0) < y_0, \tag{1.12}$$

то имеет место неравенство

$$z(x) < y(x), \quad x \in (x_0, X]. \tag{1.13}$$

Доказательство. По условию теоремы неравенство (1.13) выполняется в точке x_0. Следовательно, в силу непрерывности $y(x)$ и $z(x)$ оно выполняется также в некоторой окрестности правее точки x_0.

Предположим, что $x_1 \in [x_0, X]$ — ближайшая к x_0 точка, в которой неравенство (1.13) нарушается, т. е. $z(x_1) = y(x_1)$. Геометрически это означает, что кривые $z(x)$ и $y(x)$ при $x = x_i$ пересекаются или касаются. Но тогда должно быть $\frac{dz}{dx}(x_1) \geqslant f(x_1, y(x_1))$, что противоречит (1.12). Теорема доказана.

Сделаем существенные для дальнейшего замечания к доказанной теореме о дифференциальных неравенствах.

Замечания.

1. Мы предполагали $z(x_0) < y_0$, но теорема остается справедливой, если $z(x_0) = y_0$. В этом случае существование некоторой окрестности правее точки x_0, в которой выполнено неравенство (1.13), следует из того, что

$$\frac{dz}{dx}(x_0) < f(x_0, z(x_0)) = f(x_0, y_0) = \frac{dy}{dx}(x_0).$$

Дальнейшие рассуждения совершенно такие же, как для случая $z(x_0) < y_0$.

2. Если функция $z(x)$ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{dz}{dx} > f(x, z), \quad x \in [x_0, X], \quad z(x_0) \geqslant y_0,$$

то знак неравенства в (1.13) также изменится на противоположный.

3. Теорема остается справедливой и в том случае, когда $z(x)$ кусочно дифференцируема на $[x_0, X]$ и неравенство (1.12) выполняется для предельных значений производной $\frac{dz}{dx}$ в точках ее разрыва.

При решении ряда вопросов бывает удобно сводить задачи для дифференциальных уравнений к некоторым интегральным уравнениям.

Лемма 1.1. *Пусть $f(x, y)$ непрерывна по совокупности аргументов в некотором прямоугольнике*

$$D = \{|x - x_0| \leqslant a, \quad |y - y_0| \leqslant b\}.$$

Тогда начальная задача

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{1.14}$$

эквивалентна интегральному уравнению

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi. \tag{1.15}$$

Доказательство. Пусть на сегменте $|x - x_0| \leqslant a$ существует решение начальной задачи — функция $y(x)$, причем $y_0 - b \leqslant y(x) \leqslant y_0 + b$ (эти неравенства означают, что при $|x - x_0| \leqslant a$ интегральная кривая находится в области D, где $f(x, y)$ непрерывна). Подставив $y(x)$ в уравнение (1.14), получим тождество. Интегрируя это тождество от x_0 до $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ и используя начальное условие $y(x_0) = y_0$, получим (1.15). Следовательно, решение начальной задачи (1.14) удовлетворяет интегральному уравнению (1.15). С другой стороны, если существует непрерывное решение интегрального уравнения (1.15) — функция $y(x)$, причем $y_0 - b \leqslant y(x) \leqslant y_0 + b$, то в силу непрерывности $f(x, y)$ и следующей отсюда непрерывности функции $f(\xi, y(\xi))$ как сложной функции ξ интеграл в правой части (1.15) является непрерывно дифференцируемой функцией x. Следовательно, и левая часть (1.15), т. е. функция $y(x)$, имеет непрерывную производную, причем эта производная равна $f(x, y(x))$, а значит, $y(x)$ есть решение уравнения (1.14). Выполнение начального условия проверяется непосредственно. Лемма доказана.

Замечание. Аналогичная теорема об эквивалентности имеет место и для системы дифференциальных уравнений, т. е. для задачи (1.4), (1.9).

Лемма 1.1 остается в силе, когда функция $f(x, y)$ является кусочно непрерывной функцией переменной x. При этом интегральное уравнение (1.15) имеет непрерывное решение $y(x)$, являющееся кусочно дифференцируемой функцией x. Это решение удовлетворяет уравнению (1.14) на участках непрерывности функции $f(x, y)$.

Возможны и другие способы задания дополнительных условий, выделяющих определенное частное решение системы (1.4). К их числу относятся: так называемые краевые задачи, в которых определенное частное решение выделяется требованием, чтобы удовлетворялись дополнительные условия в нескольких различных точках области определения решения; задачи на собственные значения, состоящие в определении некоторых параметров в уравнении, при которых существуют частные решения, удовлетворяющие поставленным дополнительным требованиям; задачи поиска периодических решений и ряд других постановок, позволяющих однозначно выделить требуемое частное решение уравнения.

§ 2. Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

В настоящем параграфе будет приведен ряд типичных задач физики и механики, изучение которых методом математических моделей приводит к исследованию дифференциальных уравнений.

1. Радиоактивный распад. Физический закон, описывающий процесс радиоактивного распада, заключается в том, что скорость распада отрицательна и пропорциональна количеству нераспавшегося к данному моменту времени вещества. Коэффициент пропорциональности λ, являющийся характерной для данного вещества постоянной, не зависящей от времени, носит название *постоянной распада.* Математическое выражение закона радиоактивного распада имеет следующий вид:

$$\frac{dm}{dt} = -\lambda m(t), \tag{1.16}$$

где $m(t)$ — количество нераспавшегося к моменту времени t вещества. Это соотношение представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной.

Непосредственной проверкой легко убедиться, что решение (1.16) имеет вид

$$m(t) = Ce^{-\lambda t}, \tag{1.17}$$

где С — произвольная постоянная, которая может быть определена из дополнительного условия, например, из начального условия $m(t_0) = m_0$, задающего количество исходного вещества в начальный момент t_0. Частное решение соответствующей начальной задачи имеет вид

$$m(t) = m_0 e^{-\lambda(t-t_0)}. \tag{1.18}$$

Одной из важных физических характеристик процесса радиоактивного распада является период полураспада — промежуток времени T, за который количество распадающегося вещества уменьшается вдвое. Из (1.18) найдем

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-\lambda T},$$

откуда

$$T = \frac{1}{\lambda}\ln 2. \tag{1.19}$$

Отметим, что уравнение (1.16) является математической моделью не только процесса радиоактивного распада, но и многих других процессов деления или размножения, характеризуемых тем, что скорость деления (размножения) пропорциональна количеству вещества в данный момент времени, причем коэффициент пропорциональности есть некоторая постоянная, характеризующая рассматриваемый процесс. Как мы убедились, типичной постановкой задач для этого класса уравнений является начальная задача (задача Коши).

2. Движение системы материальных частиц. Математической моделью движения системы N материальных частиц m_i, $i = 1, \ldots, N$, принятой в теоретической механике, являются уравнения движения, следующие из второго закона Ньютона:

$$m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \boldsymbol{F}_i\Big(t, \boldsymbol{r}_j, \frac{d\boldsymbol{r}_j}{dt}\Big), \quad i, j = 1, \ldots, N. \tag{1.20}$$

Здесь m_i — массы частиц, постоянные во времени, $\boldsymbol{r}_i$ — радиус-векторы частиц, $\boldsymbol{F}$ — вектор силы, действующей на i-ю частицу и зависящий, вообще говоря, от времени, координат i-й частицы, взаимного расположения частиц системы и их скоростей. Система (1.20) представляет собой систему N векторных уравнений второго порядка. Если массы частиц не меняются в процессе движения, то, обозначив декартовы координаты радиус-вектора $\boldsymbol{r}_i$ через x_i, y_i, z_i и введя новые переменные $v_{ix} = \dfrac{dx_i}{dt}$, $v_{iy} = \dfrac{dy_i}{dt}$, $v_{iz} = \dfrac{dz_i}{dt}$ (компоненты вектора скорости i-й частицы), можем записать (1.20) в виде нормальной системы $6N$ уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} &\frac{dx_i}{dt} = v_{ix}, \quad &&\frac{dy_i}{dt} = v_{iy}, \quad &&\frac{dz_i}{dt} = v_{iz}, \\ &\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{m_i} F_{ix}, \quad &&\frac{dy_i}{dt} = \frac{1}{m_i} F_{iy}, \quad &&\frac{dz_i}{dt} = \frac{1}{m_i} F_{iz}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Сложность интегрирования системы (1.21) в первую очередь определяется видом правых частей, т. е. функциональной зависимостью компонент вектора силы от переменных t, x_i, y_i, z_i, v_{ix}, v_{iy}, v_{iz}. Во многих случаях получить значения частного решения системы с заданной степенью точности удается лишь численными методами, используя современные ЭВМ. Типичной задачей для системы (1.21) является начальная задача, заключающаяся в определении траекторий частиц по заданным в начальный момент времени t_0 положениям и скоростям всех частиц системы

$$\boldsymbol{r}_i(t_0) = \boldsymbol{r}_i^0, \quad \mathbf{v}_i(t_0) = \mathbf{v}_i^0 \tag{1.22}$$

при известных правых частях (заданных внешних силах, действующих на систему, и силах взаимодействия между частицами). Другой типичной задачей для системы (1.21) является краевая задача определения траектории, проходящей через заданные начальную и конечную точки в фазовом пространстве. К этой задаче мы, в частности, приходим при расчете траектории космического аппарата, направляемого с Земли на Луну или какую-либо планету.

В ряде случаев рассматриваются и другие постановки задачи определения частного решения системы (1.21).

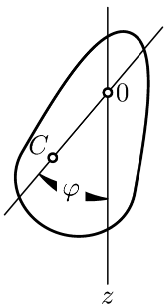

Рис. 2

Важным частным случаем системы (1.20) является уравнение колебаний физического маятника. Обычно *физическим маятником* называют абсолютно твердое тело, которое может вращаться под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр тяжести C (рис. 2).

Рассмотрим сечение данного тела плоскостью, перпендикулярной оси вращения и проходящей через центр тяжести. Точку пересечения оси вращения с данной плоскостью обозначим O. Очевидно, положение физического маятника в любой момент времени можно характеризовать углом φ, который составляет прямая OC с вертикальной осью z, проходящей через точку O. Для вывода уравнения движения воспользуемся вторым законом Ньютона в применении к вращательному движению (угловое ускорение пропорционально главному моменту внешних сил). Тогда, пренебрегая силами сопротивления, получим

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgd\sin\varphi, \tag{1.23}$$

где I — момент инерции тела относительно оси вращения, а d — расстояние от точки O до центра тяжести C.

Общее уравнение (1.23) колебаний физического маятника является нелинейным. В случае малых колебаний, ограничиваясь первым членом разложения функции $\sin\varphi$, получим

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0, \tag{1.24}$$

где через ω^2 обозначено отношение mgd/I. Очевидно, размерность $[\omega] = 1/c$, что и оправдывает введенное обозначение. Заметим, что в случае уравнения (1.24) возвращающая сила пропорциональна смещению от положения равновесия.

Как легко убедиться непосредственной проверкой, уравнение (1.24) имеет периодические решения частоты ω:

$$\varphi(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \tag{1.25}$$

где A и B — произвольные постоянные, определяющие амплитуду периодических колебаний.

При учете сил сопротивления, пропорциональных угловой скорости, уравнение (1.24) перейдет в уравнение вида

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \alpha\frac{d\varphi}{dt} + \omega^2\varphi = 0. \tag{1.26}$$

Как будет показано ниже (см. гл. 3), уравнение (1.26) определяет затухающие колебания.

3. Уравнения переноса. Пусть по трубе постоянного поперечного сечения, ось которой совпадает с осью x, движется поток воздуха, скорость которого вдоль оси трубы в точке x в момент времени t есть заданная функция $v(x,t)$. Пусть воздух переносит некоторое вещество, линейную плотность которого в сечении трубы с координатой x в момент времени t обозначим $u(x,t)$. В процессе переноса вещество осаждается на стенках трубы. Будем считать, что плотность распределения осаждающегося вещества задается выражением $f(x,t)u(x,t)$ ($f(x,t)$ — заданная функция), т. е. пропорциональна концентрации вещества (это можно рассматривать как линейное приближение к более сложному закону, справедливое при достаточно малых u). Это значит, что количество вещества, которое осаждается на участке стенки трубы между сечениями x и $x+\Delta x$ за промежуток времени $[t, t+\Delta t]$, дается законом

$$\int\limits_x^{x+\Delta x}\int\limits_t^{t+\Delta t} f(\xi,\tau)u(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Для получения дифференциального уравнения относительно u рассмотрим баланс вещества в области между сечениями x и $x+\Delta x$. Процесс диффузии не будем учитывать, что естественно, если скорость v достаточно велика.

За время Δt изменение количества вещества в рассматриваемой области равно

$$\int\limits_x^{x+\Delta x}\bigl[u(\xi, t+\Delta t) - u(\xi,t)\bigr]\,d\xi.$$

Это изменение определяется, во-первых, разностью потоков вещества: втекающего через сечение x и равного

$$\int\limits_t^{t+\Delta t} v(x,\tau)u(x,\tau)\,d\tau$$

и вытекающего через сечение $x + \Delta x$ и равного

$$\int\limits_{t}^{t+\Delta t} v(x + \Delta x, \tau) u(x + \Delta x, \tau)\, d\tau,$$

а во-вторых, убылью количества вещества (за счет осаждения на стенке), равной

$$- \int\limits_{x}^{x+\Delta x} \int\limits_{t}^{t+\Delta t} f(\xi, \tau) u(x, \tau)\, d\xi\, d\tau.$$

Таким образом, закон сохранения вещества дает

$$\int\limits_{x}^{x+\Delta x} \big[u(\xi, t + \Delta t) - u(\xi, t)\big]\, d\xi =$$
$$= \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \big[v(\xi, \tau) u(x, \tau) - v(\xi + \Delta x, \tau) u(x + \Delta x, \tau)\big]\, d\tau -$$
$$- \int\limits_{x}^{x+\Delta x} \int\limits_{t}^{t+\Delta t} f(\xi, \tau) u(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau. \quad (1.27)$$

Пользуясь теоремой о конечном приращении для подынтегральных выражений в предположении наличия непрерывных частных производных у рассматриваемых функций и вычисляя интегралы по теореме о среднем, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x^*, t)\Big|_{t=t^*} \Delta x \Delta t = -\frac{\partial}{\partial x}(v(x, t^{**}) u(x, t^{**}))\Big|_{x=x^{**}} \Delta x \Delta t -$$
$$- f(x^{***}, t^{***}) u(x^{***}, t^{***}) \Delta x \Delta t, \quad (1.28)$$

где x^*, x^{**}, x^{***}, t^*, t^{**}, t^{***} — некоторые точки из отрезков $[x, x+\Delta x]$, $[t, t + \Delta t]$ соответственно. Деля затем равенство (1.28) на $\Delta x \Delta t$ и устремляя Δx и Δt к нулю, в силу непрерывности всех членов соотношения (1.28) получим окончательное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uv) + fu = 0, \quad (1.29)$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v(x, t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t) u = 0, \quad (1.30)$$

где

$$c(x, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) + f(x, t). \quad (1.31)$$

Уравнение (1.30) является уравнением в частных производных первого порядка. Для него можно поставить, например, следующую задачу. Пусть известна концентрация вещества при $x = x_0$:

$$u(x_0, t) = u_0(t), \quad (1.32)$$

где $u_0(t)$ — заданная функция. Требуется определить $u(x,t)$ для $x \geqslant x_0$. Ниже (в гл. 8) мы увидим, что условие (1.32) однозначным образом определяет решение уравнения (1.30).

4. Задача о просачивании воды сквозь песок. Пусть вода просачивается через песок сверху вниз. Направим ось x вниз. Через $u(x,t)$ обозначим плотность воды в песке (t — время). Скорость движения воды v, очевидно, зависит от ее плотности, т. е. $v = v(u)$, где $v(u)$ есть заданная функция, причем v возрастает вместе с u.

Рассмотрим баланс воды в слое $[x, x+\Delta x]$. За время Δt изменение количества воды равно $\int\limits_x^{x+\Delta x} [u(\xi, t+\Delta t) - u(\xi, t)]\, d\xi$. Это изменение происходит за счет разности входящего потока

$$\int\limits_t^{t+\Delta t} v(u(x,\tau))u(x,\tau)\, d\tau$$

и выходящего потока

$$\int\limits_t^{t+\Delta t} v(u(x+\Delta x,\tau))u(x+\Delta x,\tau)\, d\tau.$$

Таким образом,

$$\int\limits_x^{x+\Delta x} \big[u(\xi, t+\Delta t) - u(\xi,t)\big]\, d\xi =$$
$$= \int\limits_t^{t+\Delta t} \big[v(u(x,\tau))u(x,\tau) - v(u(x+\Delta x,\tau))u(x+\Delta x,\tau)\big]\, d\tau.$$

Предполагая наличие непрерывных частных производных у u и дифференцируемость $v(u)$, применим теорему о конечном приращении и формулу среднего значения для вычисления интегралов. Поделив затем на $\Delta x \Delta t$, устремим Δx и Δt к нулю; получим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{d}{du}(v(u)u) = 0,$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial t} + p(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{1.33}$$

где

$$p(u) = v(u) + u\frac{dv}{du} \tag{1.34}$$

есть заданная функция u.

Уравнение (1.33), так же как и (1.30), является уравнением в частных производных первого порядка. Типичными задачами для него

являются как задание функции $u(x,t)$ при фиксированном значении $x = x_0$:
$$u(x_0, t) = u_0(t)$$
(т. е. задана плотность воды на границе слоя песка во все моменты времени), так и задание функции $u(x,t)$ для фиксированного момента $t = t_0$:
$$u(x, t_0) = u_1(x)$$
(т. е. задано распределение плотности воды по разрезу слоя песка в определенный момент времени t_0).

Отметим, что уравнение (1.33), в котором множитель $p(u)$ при производной зависит от неизвестной функции, сложнее уравнения (1.30), в которое как производные неизвестной функции, так и сама неизвестная функция входят линейно. Уравнение (1.33) носит название *квазилинейного уравнения*. Изучению квазилинейных уравнений будет посвящена гл. 8.

5. Колебания упругого стержня. Рассмотрим задачу о малых продольных колебаниях упругого стержня. Пусть в недеформированном состоянии стержень имеет длину l, ось его совпадает с осью x и в процессе его колебаний под действием внешних сил, направленных по оси x, поперечные сечения стержня смещаются как целое, не деформируясь в своей плоскости. Тогда процесс колебаний стержня можно характеризовать одной скалярной функцией $u(x,t)$ — смещением в момент времени t сечения стержня, имевшего в недеформированном состоянии координату x. Будем рассматривать стержень переменной плотности $p(x)$, подчиняющийся закону Гука: упругая сила, деформирующая бесконечно малый элемент стержня, заключенный между сечениями x и $x + \Delta x$, пропорциональна относительному удлинению этого элемента. Коэффициент пропорциональности (модуль упругости) также будем считать переменным вдоль стержня и обозначим его через $k(x)$. Подсчитаем относительное удлинение ε выделенного элемента. Длина этого элемента в момент времени t равна
$$\Delta l = (x + \Delta x) + u(x + \Delta x, t) - x - u(x,t) = \Delta x + u(x + \Delta x, t) - u(x,t),$$
откуда относительное удлинение
$$\varepsilon = \frac{\Delta l - \Delta x}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x,t)}{\Delta x}. \tag{1.35}$$
Переходя в выражении (1.35) к пределу при $\Delta x \to 0$, предполагая функцию $u(x,t)$ непрерывно дифференцируемой и воспользовавшись законом Гука, получим, что сила упругого напряжения в сечении x, действующая со стороны правой части на левую, равна

$k(x)u_x(x,t)$. Заметим, что полученное выражение для силы упругого напряжения справедливо лишь в случае малых колебаний, когда можно применять закон Гука к бесконечно малому элементу стержня.

Чтобы получить уравнение колебаний стержня, применим второй закон Ньютона к выделенному элементу. Будем считать, что внешние силы, приложенные к стержню, распределены с плотностью $f(x,t)$, так что импульс силы, действующей на элемент Δx за промежуток времени Δt, равен

$$\Delta I = \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau. \tag{1.36}$$

Кроме того, на граничные сечения выделенного элемента действуют определенные выше силы упругого напряжения. Тогда уравнение второго закона Ньютона запишется в виде

$$\begin{aligned} \int\limits_{x}^{x+\Delta x} \big[\rho(\xi)u_t(\xi,t+\Delta t) - \rho(\xi)u_t(\xi,t)\big]\, d\xi &= \\ = \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \big[k(x+\Delta x)u_x(x+\Delta x,\tau) - k(x)u_x(x,\tau)\big]\, d\tau &+ \\ + \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau&. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Это — интегро-дифференциальное уравнение колебаний упругого стержня. Предполагая непрерывную дифференцируемость функций, стоящих в квадратных скобках под интегралами выражения (1.37), и непрерывность $f(x,t)$, используя теорему о конечных приращениях и вычисляя интегралы по теореме о среднем, получим

$$\begin{aligned} &\rho(x^*)u_{tt}(x^*,t)|_{t=t^*}\Delta x\Delta t = \\ &\qquad = \frac{\partial}{\partial x}\big(k(x)u_x(x,t^{**})\big)\Big|_{x=x^{**}}\Delta x\Delta t + f(x^{***},t^{***})\,\Delta x\,\Delta t, \end{aligned}$$

где x^*, x^{**}, x^{***}, t^*, t^{**}, t^{***} — некоторые точки из отрезков $[x,x+\Delta x]$, $[t,t+\Delta t]$ соответственно. Поделив на $\Delta x\Delta t$ и переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$, в силу введенного выше условия гладкости функций $u(x,t)$, $\rho(x)$, $k(x)$, $f(x,t)$ получим окончательно дифференциальное уравнение продольных колебаний упругого стержня

$$\rho(x)u_{tt}(x,t) = \big[k(x)u_x(x,t)\big]_x + f(x,t). \tag{1.38}$$

Это — уравнение в частных производных второго порядка, являющееся математической моделью колебаний в пространстве и во времени непрерывной упругой среды. В статическом случае ($u_t \equiv 0$) стержень под действием постоянной во времени внешней силы и сил упругого взаимодействия принимает некоторое состояние статического равновесия, которое описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\big[k(x)u_x(x)\big]_x + f(x) = 0. \tag{1.39}$$

Типичной задачей для уравнения (1.39) является краевая задача, когда задаются смещения граничных точек стержня

$$u(0) = u_0, \quad u(l) = u_1, \tag{1.40}$$

или напряжения, приложенные к граничным сечениям

$$k(0)u_x(0) = -f_1, \quad k(l)u_x(l) = f_2. \tag{1.41}$$

В ряде случаев приходится рассматривать и другие постановки краевых задач.

Общее уравнение колебаний распределенной системы (1.38) переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение и в тех случаях, когда рассматриваются периодические колебания, происходящие под действием периодической внешней силы. Пусть $f(x,t) = \widetilde{f}(x)\cos\omega t$. Будем искать решение (1.38) также в виде $u(x,t) = \widetilde{u}(x)\cos\omega t$. Тогда для $\widetilde{u}(x)$ — амплитуды периодических колебаний, установившихся в системе под действием периодической внешней силы, — получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\big[k(x)\widetilde{u}_x(x)\big]_x + \omega^2\rho(x)\widetilde{u}(x) = -\widetilde{f}(x). \tag{1.42}$$

Типичной краевой задачей определения частного решения уравнения (1.42) опять является краевая задача с граничными условиями типа (1.40), (1.41) или более сложного вида.

В ряде случаев интерес представляет определение частот собственных колебаний системы — частот тех установившихся периодических колебаний, которые возможны в системе при отсутствии внешних сил как распределенных, так и сосредоточенных в граничных сечениях. Эта задача сводится к краевой задаче для однородного уравнения (1.42):

$$\big[k(x)u_x(x)\big] + \omega^2\rho(x)u(x) = 0. \tag{1.43}$$

Требуется определить те значения параметра ω^2, при которых уравнение (1.43) имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее заданным однородным граничным условиям, например, $u(0) = u(l) = 0$. Такая задача носит название *краевой задачи о собственных значениях.*

6. Уравнение теплопроводности. Одним из типичных уравнений математической физики является *уравнение теплопроводности*, к выводу которого мы сейчас перейдем. Тепловое состояние тела D можно описать с помощью скалярной функции $u(M,t)$ — температуры в точке M тела в момент времени t. Теплофизические характеристики тела описываются функциями плотности $\rho(M)$ и теплоемкости $c(M)$, которые в широком интервале температуры можно считать не зависящими от температуры, а также теплопроводностью $k(M)$, являющейся коэффициентом пропорциональности между плотностью потока теплоты через элементарную площадку ΔS и градиентом температуры в направлении нормали к этой площадке:

$$\Delta q = -k(M)\frac{\partial u}{\partial n}\Delta S. \tag{1.44}$$

Мы считаем поток теплоты направленным от более нагретой стороны площадки к менее нагретой (градиент температуры в этом направлении отрицателен), что определяет знак «минус» в формуле (1.44).

Чтобы построить математическую модель изменения температуры в рассматриваемом теле, составим уравнение баланса. Изменение количества теплоты ΔQ_1 в элементе объема ΔV за промежуток времени от момента t до момента $t+\Delta t$

$$\Delta Q_1 = \int\limits_{\Delta V} c(M)\rho(M)\bigl[u(M,t+\Delta t) - u(M,t)\bigr]\,dV \tag{1.45}$$

определяется потоком теплоты ΔQ_2 через боковую поверхность $\Delta\Sigma$ рассматриваемого объема:

$$\Delta Q_2 = \int\limits_{t}^{t+\Delta t}\int\limits_{\Delta\Sigma} k(M)\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma\,d\tau \tag{1.46}$$

(производная берется по направлению внешней нормали, что определяет знак «плюс» перед интегралом в (1.46)), и количеством теплоты ΔQ_3, выделяемой внешними источниками, распределенными в пространстве и во времени с плотностью $f(M,t)$,

$$\Delta Q_3 = \int\limits_{t}^{t+\Delta t}\int\limits_{\Delta V} f(M,\tau)\,dV\,d\tau. \tag{1.47}$$

Имеем

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2 + \Delta Q_3. \tag{1.48}$$

Преобразовав поверхностный интеграл в выражении для ΔQ_2 по формуле Остроградского (при этом мы предполагаем необходимую гладкость функций $k(M)$ и $u(M,t)$), получим интегральное соотношение баланса теплоты в виде

$$\int\limits_{\Delta V} c(M)\rho(M)[u(M,t+\Delta t)-u(M,t)]\,dV =$$
$$= \int\limits_{t}^{t+\Delta t}\int\limits_{\Delta V} \operatorname{div}\bigl[k(M)\operatorname{grad}u(M,\tau)\bigr]\,dV\,d\tau +$$
$$+ \int\limits_{t}^{t+\Delta t}\int\limits_{\Delta V} f(M,\tau)\,dV\,d\tau. \quad (1.49)$$

Заменив выражение в квадратных скобках в левой части (1.49) по формуле конечных приращений, вычисляя интегралы по теореме о среднем значении и переходя в полученном выражении к пределу при $\Delta V \to 0$, $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет температура внутри тела D:

$$c(M)\rho(M)\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\bigl[k(M)\operatorname{grad}u(M,t)\bigr] + f(M,t). \quad (1.50)$$

При этом, так же как и при выводе уравнения упругих колебаний (1.38), предполагаем, что неизвестная функция $u(M,t)$ и коэффициенты уравнения (1.50) обладают достаточной гладкостью.

Уравнение (1.50) является уравнением в частных производных — мы построили математическую модель изменения температуры и в пространстве, и во времени. Стационарное распределение температуры под действием не зависящих от времени источников описывается уравнением

$$\operatorname{div}\bigl[k(M)\operatorname{grad}u(M)\bigr] + f(M) = 0. \quad (1.51)$$

Это, вообще говоря, также уравнение в частных производных — температура зависит от нескольких пространственных координат. В частном случае, когда стационарное распределение температуры зависит только от одной пространственной координаты, например, в случае распределения температуры в стержне с продольной осью x, получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\bigl[k(x)u_x(x)\bigr]_x + f(x) = 0. \quad (1.52)$$

Типичными задачами определения частных решений уравнения (1.52) так же, как и в случае уравнения (1.39), являются краевые задачи с заданными граничными условиями.

ГЛАВА 2

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

§ 1. Элементарные методы интегрирования

Решение дифференциального уравнения, как правило, не удается выразить в виде элементарных функций или квадратур от них и для получения частных решений приходится прибегать к различным численным методам, эффективность которых неизмеримо возросла с появлением и развитием современных ЭВМ. Однако до появления ЭВМ стремление «проинтегрировать дифференциальное уравнение в квадратурах» определяло одно из основных направлений в исследовании обыкновенных дифференциальных уравнений и привело к появлению многочисленных справочников (см., например, [18]) по решению дифференциальных уравнений. В настоящем параграфе мы кратко остановимся на некоторых простейших и наиболее распространенных в приложениях случаях, когда удается получить решение уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{2.1}$$

в квадратурах. Во многих случаях переменные x и y в (2.1) равноправны. Это дает основание наряду с уравнением (2.1) рассматривать и уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}, \tag{2.2}$$

а также уравнение первого порядка, записанное в виде

$$f_1(x,y)\,dx + f_2(x,y)\,dy = 0.$$

1. Уравнение с разделяющимися переменными. Так называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \tag{2.3}$$

или

$$f_1(x)\,dx + f_2(y)\,dy = 0. \tag{2.4}$$

Предположим, что уравнение (2.4) имеет решение в некоторой области $D = \{|x-x_0| \leqslant a,\ |y-y_0| \leqslant b\}$ плоскости (x,y). Функции $f_1(x)$ и $f_2(y)$ определены и непрерывны соответственно на $|x-x_0| \leqslant a$

и $|y - y_0| \leqslant b$. Подставив это решение в (2.4), получим тождество, интегрируя которое, будем иметь

$$\int f_1(x)\,dx + \int f_2(y)\,dy = \text{const}\,. \tag{2.5}$$

Неопределенные интегралы в (2.5) носят название *квадратур*, откуда и возник термин «интегрирование уравнения в квадратурах». Выражение (2.5) можно переписать в виде

$$\Phi(x, y) = C. \tag{2.6}$$

Это означает, что функция $\Phi(x, y)$ сохраняет постоянные значения на решениях уравнения (2.4) (различным решениям отвечают различные постоянные).

При каждом фиксированном значении C выражение (2.6) определяет некоторое частное решение $y = y(x)$ уравнения (2.4) как неявную функцию переменного x. Если же C рассматривать как параметр, то выражение (2.6) определяет семейство решений $y = y(x, C)$. Выражение (2.6) называется *интегралом* соответствующего дифференциального уравнения. Если выражение (2.6) или, в более общем случае, выражение вида $\Phi(x, y, C) = 0$, в котором C рассматривается как параметр, определяет все множество решений соответствующего дифференциального уравнения, то это выражение называется *общим интегралом* данного дифференциального уравнения, а полученное из него выражение $y = y(x, C)$, содержащее все решения данного уравнения, называется *общим решением* данного дифференциального уравнения.

Выражение (2.5), очевидно, является общим интегралом уравнения (2.4).

Чтобы выделить частное решение уравнения (2.4), определяемое начальным условием

$$y(x_0) = y_0, \tag{2.7}$$

достаточно в выражении общего интеграла (2.5), записанного в виде

$$\int_{x_0}^{x} f_1(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} f_2(y)\,dy = C_1,$$

определить постоянную C_1. Требование удовлетворения начальному условию дает $C_1 = 0$, откуда искомое частное решение в неявной форме определяется интегралом

$$\int_{x_0}^{x} f_1(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} f_2(y)\,dy = 0. \tag{2.8}$$

Легко видеть, что ряд уравнений может быть приведен к уравнению с разделяющимися переменными (2.4). Так, уравнение

$$f_1(x)g_1(y)\,dx + f_2(x)g_2(y)\,dy = 0 \tag{2.9}$$

после деления на $g_1(y)f_2(x)$ приводится к требуемому виду. Надо иметь в виду, что при этом могут быть потеряны частные решения, обращающие в нуль произведение $g_1(y)f_2(x)$.

Пример 2.1. Простейшим уравнением с разделяющимися переменными является уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \tag{2.10}$$

Его общий интеграл имеет вид

$$y - \int f(x)\,dx = C, \tag{2.11}$$

а частное решение, удовлетворяющее начальному условию (2.7), —

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx + y_0. \tag{2.12}$$

В случае уравнения (2.10) с постоянной правой частью

$$\frac{dy}{dx} = a \tag{2.13}$$

получим частное решение, удовлетворяющее начальному условию (2.7), в виде

$$y = a(x - x_0) + y_0. \tag{2.14}$$

Пример 2.2.

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2.15}$$

Сделаем замену искомой переменной, положив $z = y/x$. Так как при этом $y = xz$, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{dz}{dx} + z$, то уравнение (2.15) переходит в уравнение

$$x\,dz + [z - f(z)]\,dx = 0 \tag{2.16}$$

вида (2.9).

К виду (2.9) приводится и уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by), \tag{2.17}$$

где a и b — постоянные. Введем новую искомую переменную $z = ax + by$. Тогда

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$$

и уравнение (2.17) переходит в уравнение

$$dz - [a + bf(z)]\,dx = 0. \qquad (2.18)$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$\mathrm{M}(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \qquad (2.19)$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — однородные функции переменных x, y одной степени. Функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией переменных x, y степени k*, если имеет место соотношение

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y). \qquad (2.20)$$

Заметим, что $f(\frac{y}{x})$ является однородной функцией нулевой степени. Записав уравнение (2.19) в виде

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \qquad (2.21)$$

мы видим, что при сделанных предположениях относительно функций $M(x, y)$ и $N(x, y)$ правая часть (2.21) является однородной функцией нулевой степени и, следовательно, с помощью замены $z = y/x$, так же как в примере 2.2, уравнение (2.19) приводится к уравнению типа (2.9).

2. Линейное уравнение первого порядка. Уравнение называется *линейным*, если оно линейно относительно неизвестной функции и ее производных. Линейное уравнение первого порядка имеет вид

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y(x) = f(x). \qquad (2.22)$$

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется *однородным*. Как легко видеть, линейное однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y(x) = 0 \qquad (2.23)$$

приводится к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{y} + p(x)\,dx = 0,$$

общий интеграл которого имеет вид

$$\ln|y| + \int p(x)\,dx = C_1, \tag{2.24}$$

а общее решение —

$$y = Ce^{-\int p(x)\,dx}, \tag{2.25}$$

где $C \neq 0$. Очевидно, что частное решение $y(x) = 0$ уравнения (2.23), которое мы потеряли, разделив (2.22) на y, содержится в формуле (2.25) при $C = 0$. Поэтому (2.25), где C — теперь уже любое вещественное число, является общим решением уравнения (2.23).

Из (2.25), записывая первообразную $\int p(x)\,dx$ в виде определенного интеграла $\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\,dx$, получим частное решение уравнения (2.23), удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$ в виде

$$y = y_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\,dx}. \tag{2.26}$$

Заметим, что по самому способу построения формула (2.26) является доказательством единственности решения начальной задачи для уравнения (2.23) в предположении, что это решение существует. Действительно, подставляя любое решение начальной задачи в уравнение (2.23) и проводя последовательно преобразования (2.24)–(2.26), мы всегда придем к одному и тому же результату — формуле (2.26). Чтобы доказать существование решения данной задачи, достаточно путем непосредственной проверки убедиться, что для непрерывной функции $p(x)$ функция $y(x)$, определенная формулой (2.26), удовлетворяет всем условиям начальной задачи для уравнения (2.23). Очевидно, подобные рассуждения можно провести и в случае начальной задачи для уравнений с разделяющимися переменными, рассмотренных в п. 1 настоящего параграфа.

Решение линейного неоднородного уравнения (2.22) найдем методом вариации постоянной, который состоит в том, что мы используем специальную замену неизвестной функции

$$y(x) = C(x)e^{-\int p(x)\,dx}, \tag{2.27}$$

где $C(x)$ — функция, подлежащая определению. Подставляя решения такого вида в уравнение, получим

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)\,dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)\,dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)\,dx} = f(x),$$

откуда

$$\frac{dC}{dx} = f(x)e^{\int p(x)\,dx}.$$

Интегрируя это равенство, найдем

$$C(x) = \int f(x) e^{\int p(x)\,dx} dx + C_1,$$

и, окончательно,

$$y(x) = C_1 e^{-\int p(x)\,dx} + e^{-\int p(x)\,dx} \int f(x) e^{\int p(x)\,dx} dx. \tag{2.28}$$

Из полученного выражения следует, что общее решение линейного неоднородного уравнения (2.22) представляется в виде суммы общего решения (2.25) линейного однородного уравнения (2.23) и частного решения неоднородного уравнения (2.22), в чем легко убедиться, подставив второе слагаемое формулы (2.28) в неоднородное уравнение (2.22).

Решение начальной задачи $y(x_0) = y_0$ для уравнения (2.22) найдем, определяя из начального условия постоянную C_1 в формуле (2.28). При этом в качестве первообразных функций, записанных в (2.28) в виде неопределенных интегралов, удобно взять определенные интегралы $\int\limits_{x_0}^{x}$. Тогда $C_1 = y_0$ и

$$y(x) = y_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)\,d\xi} + e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)\,d\xi} \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi) e^{\int\limits_{x_0}^{\xi} p(\xi)\,d\xi} d\xi,$$

то есть,

$$y(x) = y_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)\,d\xi} + \int\limits_{x_0}^{x} e^{-\int\limits_{\xi}^{x} p(\xi)\,d\xi} f(\xi)\,d\xi. \tag{2.29}$$

Таким образом, искомое решение определяется как сумма решения однородного уравнения (2.23), удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$, и решения неоднородного уравнения, удовлетворяющего нулевому начальному условию.

Представление (2.29) получено в предположении существования решения. Оно доказывает единственность решения начальной задачи для неоднородного уравнения (2.22).

Существование решения начальной задачи для уравнения (2.22) при непрерывных функциях $p(x)$ и $f(x)$ устанавливается непосредственно подстановкой формулы (2.29) в уравнение и начальное условие.

З а м е ч а н и е. Единственность решения этой задачи можно установить, пользуясь также следующими рассуждениями, характерными вообще для линейных задач. Предположим, что существуют два различных решения начальной задачи $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Рассмотрим их разность $z(x) = y_1(x) - y_2(x)$. Очевидно, функция $z(x)$ является решением начальной задачи для соответствующего однородного уравнения с нулевым начальным условием

$$\frac{dz}{dx} + p(x)z(x) = 0, \quad z(x_0) = 0.$$

Отсюда в силу единственности решения начальной задачи для линейного однородного уравнения следует, что $z(x) \equiv 0$.

Получим важную оценку роста решения начальной задачи для линейного уравнения. Пусть в уравнении (2.22) функции $p(x)$ и $f(x)$ на рассматриваемом промежутке изменения независимой переменной удовлетворяют условиям

$$|p(x)| \leqslant K, \quad |f(x)| \leqslant M. \tag{2.30}$$

Тогда для решения начальной задачи из представления (2.29) для $x \geqslant x_0$ следует оценка

$$|y(x)| \leqslant |y_0|e^{K(x-x_0)} + \frac{M}{K}\Big(e^{K(x-x_0)} - 1\Big). \tag{2.31}$$

В заключение этого пункта укажем некоторые часто встречающиеся в приложениях уравнения, которые соответствующими подстановками могут быть сведены к линейному уравнению.

Рассмотрим так называемое уравнение Бернулли

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^n,$$

где $n \neq 1$, иначе уравнение уже линейное. Введем новую неизвестную функцию $z = y^{1-n}$. Тогда уравнение перейдет в линейное уравнение

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + p(x)z(x) = f(x),$$

общее решение которого дается формулой (2.29).

Более сложное уравнение Риккати

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y(x) + q(x)y^2(x) = f(x)$$

в общем случае в квадратурах не интегрируется. Однако оно обладает следующим важным свойством: если известно какое-либо частное решение $y = y_1(x)$ уравнения Риккати, то нахождение его общего решения сводится к решению линейного уравнения. Действительно, введя новую неизвестную функцию

$$z(x) = y(x) - y_1(x),$$

получим для нее уравнение Бернулли

$$\frac{dz}{dx} + \big[p(x) + 2q(x)y_1(x)\big]z(x) + q(x)z^2(x) = 0,$$

что и доказывает высказанное утверждение.

3. Лемма о дифференциальных неравенствах. В дальнейшем будет использовано следующее утверждение.

Лемма 2.1 (лемма о дифференциальных неравенствах). *Пусть функция $z(x)$ непрерывна и имеет при $x \in [x_0, X]$ кусочно непрерывную производную, удовлетворяющую неравенству*

$$\left|\frac{dz}{dx}\right| \leqslant N|z| + a, \tag{2.32}$$

где $N \geqslant 0$, $a \geqslant 0$ — положительные постоянные. (В точках разрыва производной неравенству (2.32) удовлетворяют ее предельные значения.) Тогда имеет место оценка

$$|z(x)| \leqslant s(x), \quad x \in (x_0, X], \tag{2.33}$$

где $s(x)$ — решение начальной задачи для линейного дифференциального уравнения

$$\frac{ds}{dx} = Ns + a, \quad s(x_0) = b \geqslant |z(x_0)| \geqslant 0. \tag{2.34}$$

Доказательство этой леммы проводится аналогично доказательству теоремы Чаплыгина. Рассмотрим функцию $s(x)$, являющуюся решением начальной задачи

$$\frac{d\widetilde{s}}{dx} = \widetilde{N}\widetilde{s} + \widetilde{a}, \quad \widetilde{s}(x_0) = \widetilde{b},$$

где $\widetilde{N} > N$, $\widetilde{a} > a$, $\widetilde{b} > b$, а в остальном $\widetilde{N}$, $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$ — произвольные числа. Заметим, что $\widetilde{s}(x) > 0$. Так как $\frac{dz}{dx}(x_0) < \frac{d\widetilde{s}}{dx}(x_0)$, то в некоторой окрестности правее точки x_0 имеет место неравенство $z(x) < \widetilde{s}(x)$. Пусть $x = x_1 > x_0$ — наименьшее значение x, при котором это неравенство нарушается, т. е. $z(x_1) = \widetilde{s}(x_1)$. Но тогда

$$\frac{dz}{dx}(x_1) \geqslant \frac{d\widetilde{s}}{dx}(x_1) = \widetilde{N}\widetilde{s}(x_1) + \widetilde{a} = \widetilde{N}z(x_1) + \widetilde{a},$$

что противоречит (2.32). (Если x_1 — точка разрыва производной, то вместо $\frac{dz}{dx}$ в неравенство входит левая производная от z в точке x_1.) Аналогично из неравенства $\frac{dz}{dx}(x_0) > -\frac{d\widetilde{s}}{dx}(x_0)$ следует, что в окрестности x_0 имеет место неравенство $z(x) > -\widetilde{s}(x)$, и первое нарушение этого неравенства при $x = x_2 > x_0$, т. е. равенство $z(x_2) = \widetilde{s}(x_2)$, приводит к тому, что $\frac{dz}{dx}(x_2) \leqslant -\frac{d\widetilde{s}}{dx}(x_2)$, а отсюда опять следует противоречие с (2.32).

Таким образом, справедлива оценка

$$|z(x)| < \widetilde{s}(x) = \widetilde{b}e^{\widetilde{N}(x-x_0)} + \frac{\widetilde{a}}{\widetilde{N}}\left(e^{\widetilde{N}(x-x_0)} - 1\right)$$

(для $\widetilde{s}(x)$ здесь выписано явное выражение, найденное, например, по формуле (2.29)). Так как $\widetilde{N} = N + \varepsilon_1$, $\widetilde{a} = a + \varepsilon_2$, $\widetilde{b} = b + \varepsilon_3$ ($\varepsilon_i > 0$, $i = 1, 2, 3$), то, переходя в последнем неравенстве к пределу $\varepsilon_i \to 0$, получим оценку

$$|z(x)| \leqslant be^{N(x-x_0)} + \frac{a}{N}\big(e^{N(x-x_0)} - 1\big) = s(x),$$

где $s(x)$ — решение начальной задачи (2.34). Лемма доказана.

Функцию $s(x)$ запишем также в удобном для дальнейшего виде

$$s(x) = bs_1(x) + as_2(x), \tag{2.35}$$

где

$$s_1(x) = e^{N(x-x_0)} \tag{2.36}$$

и

$$s_2(x) = \frac{1}{N}\big(e^{N(x-x_0)} - 1\big). \tag{2.37}$$

З а м е ч а н и е. Оценку (2.31) легко получить из доказанной леммы.

§ 2. Теоремы существования и единственности решения начальной задачи для одного уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной. Алгоритм ломаных Эйлера

В предыдущем параграфе с помощью явных формул было доказано существование и единственность решения начальной задачи для линейного уравнения (2.22). Перейдем теперь к рассмотрению соответствующих теорем для начальной задачи (задачи Коши)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{2.38}$$

при достаточно общих условиях, наложенных на функцию $f(x, y)$. При этом доказательство опять будет проведено конструктивным путем — одновременно с доказательством теоремы существования решения задачи (2.38) будет дан алгоритм построения функции $\bar{y}(x)$, сколь угодно точно аппроксимирующей решение исходной задачи. Идея этого метода принадлежит Эйлеру. Метод состоит в том, что интегральная кривая, являющаяся решением задачи (2.38), последовательными шагами приближенно заменяется некоторой ломаной — ломаной Эйлера.

Пусть функция $f(x,y)$ задана в области G плоскости (x,y). Построим в этой области замкнутый прямоугольник $D = \{|x-x_0| \leqslant a, |y-y_0| \leqslant b\}$ с центром в начальной точке (x_0,y_0) и поставим своей целью определение интегральной кривой $y(x)$, выходящей из данной начальной точки (x_0,y_0) и идущей в сторону возрастающих $x > x_0$.

Предположим, что в G функция $f(x,y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной y:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant N|y_1 - y_2|, \tag{2.39}$$

где N — постоянная, не зависящая ни от x, ни от y. Заметим, что из непрерывности функции $f(x,y)$ в замкнутой области D следует ее ограниченность в данной области:

$$|f(x,y)| \leqslant M, \quad (x,y) \in D. \tag{2.40}$$

Искомая интегральная кривая, если она существует, пересечет либо вертикальную прямую $x = x_0 + a$, либо одну из горизонтальных прямых $y = y_0 + b$ или $y = y_0 - b$ — границы области D. В последнем случае абсцисса точки пересечения меньше $x_0 + a$ и искомая интегральная кривая определена не на всем отрезке $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a$. Однако из простых геометрических соображений ясно, что до точки $x_0 + \dfrac{b}{M}$ она не пересечет горизонтальной границы: случай $b/M \leqslant a$ представлен на рис. 3; случай $b/M \geqslant a$ — на рис. 4; I — интегральная кривая, проходящая через точку (x_0,y_0); II — прямые с тангенсом угла наклона, равным ±M. Поэтому в дальнейшем вместо области D будем рассматривать прямоугольник $D_{\text{н}} = \{|x-x_0| \leqslant H, |y-y_0| \leqslant b\}$, где $H = \min\{a, b/M\}$.

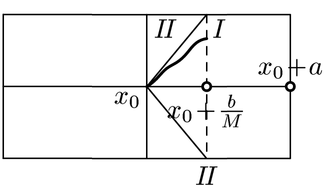

Рис. 3

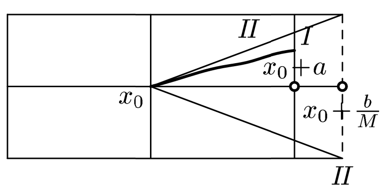

Рис. 4

Перейдем теперь к построению ломаных Эйлера. Разобьем отрезок $[x_0, X]$, $X = x_0 + H$, на n частей точками $x = x_0, x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n = X$. Обозначим $x_i - x_{i-1} = h_i$ и $h = \max\{h_i\}$. На первом шаге «заморозим» $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0), т. е. заменим правую часть (2.38) значением $f(x_0,y_0)$. Тогда получим уравнение с постоянной правой частью

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = f(x_0,y_0), \tag{2.41}$$

интегральной кривой которого служит отрезок прямой

$$\bar{y}(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0), \quad x \in [x_0, x_1]. \tag{2.42}$$

В точке x_1 это решение принимает значение $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$. На втором шаге примем за новую начальную точку (x_1, y_1) и опять, «заморозив» $f(x, y)$ в этой точке, построим следующее прямолинейное звено и т. д.

Полученная таким путем ломаная называется *ломаной Эйлера.* Нетрудно видеть, что на отрезке $[x_0, X]$ ломаная Эйлера не выйдет из прямоугольника $D_{\text{н}}$. Действительно, из (2.42) получим, что при $x \in [x_0, x_1]$ функция $\bar{y}(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|\bar{y}(x) - y_0| \leqslant M(x - x_0) \leqslant MH \leqslant b,$$

т. е. первое звено ломаной не выходит из $D_{\text{н}}$. Поэтому $|f(x_1, y_1)| \leqslant M$. Тогда на следующем шаге $x \in [x_1, x_2]$ имеем

$$\begin{aligned} |\bar{y}(x) - y_0| &\leqslant |\bar{y}(x) - y_1| + |y_1 - y_0| = \\ &= |f(x_1, y_1)|(x - x_1) + |y_1 - y_0| \leqslant \\ &\leqslant M(x - x_1) + M(x_1 - x_0) = M(x - x_0) \leqslant MH \leqslant b, \end{aligned}$$

т. е. и второе звено ломаной Эйлера не выходит из $D_{\text{н}}$. Продолжая аналогично, получим, что и вся ломаная Эйлера не выходит из $D_{\text{н}}$.

При достаточно мелком шаге разбиения естественно считать ломаную Эйлера приближенной интегральной кривой. Таким образом, мы получаем алгоритм построения приближенного решения начальной задачи.

Для обоснования описанного алгоритма достаточно доказать, что последовательность ломаных Эйлера $\{\bar{y}_{(n)}(x)\}$ при $h \to 0$ сходится и предельная функция $y(x)$ является решением начальной задачи (2.38). Это одновременно является и доказательством теоремы существования решения начальной задачи.

Определение. Непрерывная на отрезке $[x_0, X]$ функция $\widetilde{y}(x)$ с кусочно непрерывной производной $\dfrac{d\widetilde{y}}{dx}$, график которой целиком лежит в $D_{\text{н}}$, называется *ε-приближенным по невязке решением начальной задачи* (2.38), если $|\widetilde{y}(x_0) - y_0| \leqslant \varepsilon$ и при подстановке функции $\widetilde{y}(x)$ в уравнение (2.38) последнее принимает вид

$$\frac{d\widetilde{y}}{dx} = f(x, \widetilde{y}) + \psi(x), \tag{2.43}$$

где невязка $\psi(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\sup_{x \in [x_0, X]} |\psi(x)| \leqslant \varepsilon. \tag{2.44}$$

Очевидно, точное решение начальной задачи, если оно существует, можно считать ε-приближенным по невязке решением при $\varepsilon = 0$.

Пусть для любого $\varepsilon > 0$ существуют ε-приближенные по невязке решения начальной задачи (2.38). Тогда имеет место следующая лемма.

Лемма 2.2. *Для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\varepsilon_1 > 0$, что все ε_1-приближенные по невязке решения задачи* (2.38) *отличаются между собой на отрезке $[x_0, X]$ не более, чем на ε.*

Доказательство. Возьмем два произвольных ε_1-приближенных по невязке решения задачи (2.38): $\widetilde{y}_{(1)}(x)$ и $\widetilde{y}_{(2)}(x)$. Очевидно, что

$$\frac{d}{dx}\widetilde{y}_{(1)}(x) = f(x, \widetilde{y}_{(1)}(x)) + \psi_1(x), \tag{2.45}$$

$$\frac{d}{dx}\widetilde{y}_{(2)}(x) = f(x, \widetilde{y}_{(2)}(x)) + \psi_2(x), \tag{2.46}$$

где

$$|\widetilde{y}_{(1)}(x_0) - \widetilde{y}_{(2)}(x_0)| \leqslant 2\varepsilon_1, \tag{2.47}$$

$$\sup_{x\in[x_0, X]} |\psi_1(x) - \psi_2(x)| \leqslant 2\varepsilon_1. \tag{2.48}$$

Обозначим

$$\widetilde{y}_{(2)}(x) - \widetilde{y}_{(1)}(x) = z(x), \tag{2.49}$$

$$\psi_2(x) - \psi_1(x) = \varphi(x). \tag{2.50}$$

Вычитая (2.45) из (2.46), получим

$$\frac{dz}{dx} = f(x, \widetilde{y}_{(2)}(x)) - f(x, \widetilde{y}_{(1)}(x)) + \varphi(x). \tag{2.51}$$

Так как $\widetilde{y}_{(1)}(x)$ и $\widetilde{y}_{(2)}(x)$ не выходят из прямоугольника $D_{\text{н}}$, где функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица (2.39), то из (2.51) получим дифференциальное неравенство

$$\left|\frac{dz}{dx}\right| \leqslant N|z| + 2\varepsilon_1. \tag{2.52}$$

В силу леммы 2.1 имеем

$$|z(x)| \leqslant s(x), \tag{2.53}$$

где $s(x)$ — решение начальной задачи

$$\frac{ds}{dx} = Ns + 2\varepsilon_1, \quad s(x_0) = |z(x_0)|. \tag{2.54}$$

Воспользовавшись явным выражением функции $s(x)$ (2.35), получим

$$|z(x)| \leqslant |z(x_0)|e^{N(x-x_0)} + \frac{2\varepsilon_1}{N}\left(e^{N(x-x_0)} - 1\right).$$

Так как на основании оценки (2.47) имеем $|z(x_0)| \leqslant 2\varepsilon_1$, то это неравенство принимает вид

$$|z(x)| = |\widetilde{y}_{(1)}(x) - \widetilde{y}_{(2)}(x)| \leqslant 2\varepsilon_1\left[e^{N(x-x_0)} + \frac{1}{N}\left(e^{N(x-x_0)} - 1\right)\right]. \quad (2.55)$$

Отсюда

$$\sup_{x\in[x_0,X]} |\widetilde{y}_2(x) - \widetilde{y}_1(x)| \leqslant 2\varepsilon_1\left[e^{NH} + \frac{1}{N}\left(e^{NH} - 1\right)\right] = 2\varepsilon_1\Omega, \quad (2.56)$$

где $\Omega > 0$ — не зависящая от ε_1 постоянная. Выбирая $\varepsilon_1 < \varepsilon/(2\Omega)$, мы и получим утверждение леммы.

Пусть $\{\widetilde{y}_{(n)}(x)\}$ — некоторая последовательность ε_n-приближенных по невязке решений, т.е.

$$\sup_{x\in[x_0,X]} |\psi_n(x)| \leqslant \varepsilon_n, \quad |\widetilde{y}_{(n)}(x_0) - y_0| \leqslant \varepsilon_n. \quad (2.57)$$

Определение. Если $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$, то последовательность $\{\widetilde{y}_{(n)}(x)\}$ назовем *сходящейся по невязке.*

Так как в оценке (2.56) постоянная Ω не зависит от x, то из леммы 2.2 следует, что сходящаяся по невязке последовательность сходится равномерно на $[x_0, X]$.

Имеет место следующая основная теорема.

Теорема 2.1. *Пусть в начальной задаче*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0,$$

функция $f(x,y)$ в области D непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной y. Тогда последовательность $\widetilde{y}_{(n)}(x)$, сходящаяся по невязке на отрезке $[x_0, X]$, сходится равномерно на этом отрезке к функции $y(x)$, являющейся решением начальной задачи.

Доказательство. Последовательность $\{\widetilde{y}_{(n)}(x)\}$ в силу леммы 2.2 удовлетворяет критерию Коши равномерной сходимости на отрезке $[x_0, X]$. Тем самым существует функция $y(x)$, к которой последовательность $\{\widetilde{y}_{(n)}(x)\}$ сходится равномерно, и эта функция будет непрерывной, поскольку $\widetilde{y}_{(n)}(x)$ непрерывны.

Подставим ε_n-приближенное решение $\widetilde{y}_{(n)}(x)$ в уравнение (2.38) и заменим получающееся при этом тождество эквивалентным интегральным соотношением (см. лемму 1.1)

$$\widetilde{y}_{(n)}(x) = \widetilde{y}_{(n)}(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} \left[f(\xi, \widetilde{y}_{(n)}(\xi)) + \psi_n(\xi)\right] d\xi. \tag{2.58}$$

Так как $|\psi_n| \leqslant \varepsilon_n$ и $|\widetilde{y}_{(n)}(x_0) - y_0| \leqslant \varepsilon_n$, то, переходя в (2.58) к пределу при $\varepsilon_n \to 0$, получим

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi. \tag{2.59}$$

Из последнего тождества следует, что предельная функция $y(x)$ дифференцируема. Дифференцируя, находим

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{2.60}$$

Кроме того, $y(x_0) = y_0$. Таким образом, предельная функция последовательности $\{\widetilde{y}_{(n)}(x)\}$ является точным решением начальной задачи (2.38). Теорема доказана.

Для доказательства теоремы существования решения начальной задачи (2.38) нам теперь остается показать, что существует сходящаяся по невязке последовательность ε_n-приближенных по невязке решений этой задачи. Сейчас мы покажем, что построенные выше ломаные Эйлера образуют такую последовательность.

Теорема 2.2. *Если выполнены условия теоремы* 2.1, *то последовательность ломаных Эйлера при* $h \to 0$ *сходится равномерно на отрезке* $[x_0, X]$ *к функции* $y(x)$, *являющейся решением начальной задачи.*

Доказательство. Так как начальные значения ломаных Эйлера $\bar{y}_{(n)}(x)$ по построению совпадают с y_0, то достаточно убедиться в том, что при $h \to 0$ невязки $\psi_n(x)$ равномерно на $[x_0, X]$ стремятся к нулю.

Подставляя на произвольном шаге $x_s \leqslant x \leqslant x_{s+1}$ в уравнение (2.38) ломаную Эйлера $\bar{y}_n(x)$, для невязки $\psi_n(x)$ получим

$$\begin{aligned} \psi_n(x) = \frac{d}{dx}\bar{y}_{(n)}(x) - f(x, \bar{y}_{(n)}(x)) = \\ = f(x_s, \bar{y}_{(n)}(x_s)) - f(x, \bar{y}_{(n)}(x)), \quad x \in [x_s, x_{s+1}]. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Поскольку $|x - x_s| \leqslant h$ и $\bar{y}_{(n)}(x) = \bar{y}_{(n)}(x_s) + (x - x_s) f(x_s, \bar{y}_{(n)}(x_s))$, $x \in [x_s, x_{s+1}]$, то имеет место оценка

$$|\bar{y}_{(n)}(x) - \bar{y}_{(n)}(x_s)| \leqslant Mh. \tag{2.62}$$

В силу равномерной непрерывности функции $f(x, y)$ отсюда и следует, что для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $h_0(\varepsilon)$, что при $h < h_0(\varepsilon)$

$$\sup_{x \in [x_0, X]} |\psi_n(x)| \leqslant \varepsilon, \tag{2.63}$$

что и доказывает в силу теоремы 2.1 равномерную сходимость на отрезке $[x_0, X]$ последовательности ломаных Эйлера при $h \to 0$ к функции $y(x)$, являющейся решением начальной задачи. Теорема доказана.

Из доказанных теорем следует

Теорема 2.3 (теорема существования). *Если функция $f(x, y)$ в области D непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной y, то на отрезке $[x_0, X]$ существует решение начальной задачи.*

При сделанных предположениях относительно функции $f(x, y)$ решение начальной задачи (2.38) единственно. Имеет место

Теорема 2.4 (теорема единственности). *При выполнении условий теоремы* 2.3 *начальная задача* (2.38) *имеет на* $[x_0, X]$ *единственное решение.*

Эту теорему можно рассматривать как следствие леммы 2.2. Если допустим, что имеются два точных решения задачи Коши, то их начальные значения совпадают, а их невязки равны нулю. Поэтому по лемме 2.2 эти решения полностью совпадают на отрезке $[x_0, X]$.

Кроме введенного выше понятия ε-приближенного по невязке решения часто используется понятие решения, приближенного по отклонению. Дадим его определение.

Определение. Ограниченная на $[x_0, X]$ функция $\widetilde{y}(x)$ называется *ε-приближенным по отклонению решением задачи Коши* (2.38), если точное решение $y(x)$ задачи Коши существует и

$$\sup_{x \in [x_0, X]} |\widetilde{y}(x) - y(x)| \leqslant \varepsilon. \tag{2.64}$$

Из предыдущих рассуждении вытекает, что из сходимости последовательности решений, приближенных по невязке, следует и их сходимость по отклонению.

Заметим, что обратное утверждение неверно: если отклонения приближенных решений от точного стремятся к нулю, то сами решения могут при этом иметь сколь угодно большие невязки, более того, решения, приближенные по отклонению, могут быть не дифференцируемы и даже не непрерывны.

Замечания.

1. Метод ломаных Эйлера не только позволяет доказать существование решения рассмотренной начальной задачи, но и дает непосредственный алгоритм построения приближенного решения, сколь угодно близко аппроксимирующего точное. Этот метод легко реализовать на ЭВМ. Поэтому он является одним из эффективных методов численного решения начальных задач. При его конкретной реализации естественно возникают вопросы точности полученного приближения и ряд специфических вычислительных аспектов общей проблемы численных методов. Эти вопросы подробнее будут рассмотрены в гл. 6.

2. Мы доказали существование и единственность решения $y(x)$ начальной задачи (2.38) лишь на отрезке $[x_0, X]$. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица (2.39) в исходной области G. Так как при $x = X$ интегральная кривая не вышла из области G, то, взяв точку $x = X$, $y = y(X)$ за начальную, можно, повторив проведенные выше рассуждения, продолжить решение на новый отрезок $[X, X_1]$. Можно показать, что, продолжая этот процесс, удается построить интегральную кривую, сколь угодно близко подходящую к границе области G.

Мы рассмотрели алгоритм построения интегральной кривой $y(x)$ в сторону возрастающих $x > x_0$. Очевидно, аналогичные рассуждения могут быть проведены и для построения интегральной кривой в сторону убывающих $x < x_0$. При этом соответствующий процесс построения интегральной кривой можно опять продолжать до тех пор, пока интегральная кривая не подойдет к границе области G.

3. Можно доказать существование решения начальной задачи и при одном требовании непрерывности функции $f(x, y)$ (теорема Пеано). Однако одной непрерывности функции $f(x, y)$ недостаточно для единственности решения начальной задачи. Так, например, задача

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}, \quad y(0) = 0, \tag{2.65}$$

помимо тривиального решения $y \equiv 0$ имеет еще решение

$$y = x^2/4, \tag{2.66}$$

удовлетворяющее нулевому начальному условию. (Как легко видеть, правая часть уравнения (2.65) в окрестности точки $(0, 0)$ имеет неограниченную производную и не удовлетворяет условию Липшица.)

4. Если через точку (x_0, y_0) проходит единственная интегральная кривая, являющаяся решением задачи (2.38) для данного дифференциального уравнения, то точка (x_0, y_0) называется *обыкновенной*

точкой данного уравнения. Точка (x, y) области G, не являющаяся обыкновенной, называется *особой точкой* данного дифференциального уравнения. Через особую точку либо не проходит ни одной интегральной кривой, либо проходят по крайней мере две интегральные кривые (через особую точку может проходить и бесконечное число интегральных кривых).

Если в окрестности точки (x_0, y_0) выполнены условия теорем существования и единственности, то точка (x_0, y_0) будет обыкновенной. При этом следует иметь в виду, что нарушение сформулированных выше условий теорем существования и единственности решения начальной задачи служит лишь необходимым, но не обязательно достаточным условием того, что данная точка является особой. Поэтому для окончательного решения вопроса, является ли данная точка особой, необходимо дополнительное исследование.

5. В начале § 1 гл. 2 указывалось, что во многих случаях следует наряду с уравнением (2.1) рассматривать уравнение (2.2). Если при этом в точке (x_0, y_0) для (2.1) нарушаются условия теоремы 2.3 в результате обращения $f(x, y)$ в бесконечность, то $1/f(x, y)$ в этой точке обращается в нуль и для уравнения 2.2 условия теоремы существования и единственности выполнены. Таким образом, в этом случае точка (x_0, y_0) является обыкновенной, но проходящая через нее интегральная кривая имеет вертикальную касательную.

6. Если функция $f(x, y)$ является разрывной в области G, имеющей разрывы первого рода на прямых $x = x_k = \text{const}$ $(k = 1, 2, ..., N)$, то даже при условии, что $f(x, y)$ удовлетворяет требованиям теоремы 2.3 на участках своей непрерывности, в области G не существует обычного, так называемого «классического» решения начальной задачи (2.38). Однако, как нетрудно видеть, в этом случае можно реализовать алгоритм последовательного построения ломаных Эйлера $\{\bar{y}_n(x)\}$. Точки разрыва x_k мы каждый раз будем включать в число точек разбиения отрезка $[x_0, X]$ и в качестве замороженного значения функции $f(x, y)$ на шаге, начинающемся в точке разрыва, брать определенное, например, правое предельное значение функции $f(x, y)$. При этом предельная функция $y(x)$ последовательности $\bar{y}_n(x)$ при $h \to 0$, очевидно, окажется непрерывной с кусочно непрерывной производной, имеющей разрывы первого рода в точках $x = x_k$. При подстановке функции $y(x)$ в исходное дифференциальное уравнение невязка на участках непрерывности $f(x, y)$ равна нулю. Эта предельная функция $y(x)$ является обобщенным решением начальной задачи (2.38) на отрезке $[x_0, X]$, понятие о котором было дано в § 1 гл 1.

§ 3. Уравнение, неразрешенное относительно производной

1. Теорема существования и единственности решения. Перейдем теперь к рассмотрению дифференциального уравнения первого порядка общего вида

$$F(x, y, y') = 0 \tag{2.67}$$

и выясним достаточные условия существования решений этого уравнения. Функция F в области своего определения задает соотношение между неизвестной функцией y, ее производной $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и независимой переменной x. Если это соотношение удается разрешить относительно производной y', то получаем одно или несколько дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной

$$y' = f_k(x, y) \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2.68}$$

Пусть функции $f_k(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) плоскости (x, y) удовлетворяют условиям теорем существования и единственности решения начальной задачи Коши для уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной. Тогда через точку (x_0, y_0) проходит по одной и только одной интегральной кривой $y_k(x)$ каждого из этих уравнений $(k = 1, 2, \ldots)$. Все эти интегральные кривые являются решениями исходного дифференциального уравнения (2.67) (при подстановке в уравнение (2.67) функции $y_k(x)$ обращают его в тождество). Направление вектора касательной к интегральной кривой $y_k(x)$ уравнения (2.68) в точке (x_0, y_0) определяется значением функции $f_k(x_0, y_0)$. Если эти значения различны, то через точку (x_0, y_0) проходит несколько интегральных кривых уравнения (2.67) (столько, каково число уравнений (2.68), полученных при разрешении уравнения (2.67) относительно производной), но направления векторов касательных к этим кривым в точке (x_0, y_0) различны. Поэтому, чтобы выделить определенное решение уравнения (2.67), надо не только задать начальные данные — значение решения $y(x)$ в точке x_0, т. е.

$$y(x_0) = y_0, \tag{2.69}$$

но и значение производной решения в этой точке $y'(x_0) = y'_0$. Очевидно, это значение не может быть задано произвольно: y'_0 должно быть корнем уравнения

$$F(x_0, y_0, y') = 0. \tag{2.70}$$

Итак, существование решения уравнения (2.67) связано с возможностью разрешить его относительно y' и существованием решений уравнений (2.68). Тем самым достаточные условия разрешимости уравнения (2.67) определяются известными из курса анализа условиями существования неявной функции и ее непрерывности вместе с производной.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.5 (существования и единственности). *Если в некотором замкнутом трехмерном прямоугольнике D с центром в точке (x_0, y_0, y_0'), где y_0' — действительный корень уравнения $F(x_0, y_0, y')=$ $=0$, выполнены условия:*

а) *$F(x, y, y')$ непрерывна по совокупности аргументов вместе с частными производными* $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ *и* $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$,

б) $\dfrac{\partial F}{\partial y'}(x_0, y_0, y_0') \neq 0$,

то в окрестности точки $x = x_0$ существует решение $y = y(x)$ уравнения (2.67), удовлетворяющее условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0, \tag{2.71}$$

причем это решение единственно.

Доказательство. В силу условий а) и б) теоремы в окрестности точки (x_0, y_0, y_0') выполнены условия существования и единственности неявной функции

$$y' = f(x, y), \tag{2.72}$$

удовлетворяющей условию

$$y_0' = f(x_0, y_0), \tag{2.73}$$

причем найдется такой замкнутый прямоугольник D_2 с центром в точке (x_0, y_0), в котором функция $f(x, y)$ непрерывна вместе с производной $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, вычисляемой по правилу дифференцирования неявной функции

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, f(x, y))}. \tag{2.74}$$

Но это означает, что начальная задача $y(x_0) = y_0$ для уравнения (2.72) имеет, и притом единственное, решение на отрезке

$$|x - x_0| \leqslant H, \tag{2.75}$$

так как выполнены все условия теорем существования и единственности 2.3 и 2.4. Теорема 2.5 доказана.

Если интегральные кривые уравнений (2.68), пересекающиеся в точке (x_0, y_0), имеют общую касательную в этой точке, направление которой определяется значением y'_0, то в этой точке, очевидно, будут нарушены сформулированные выше условия единственности решения уравнения (2.67) относительно y'.

Пример 2.3. Рассмотрим уравнение

$$(y')^2 - (2x + y)y' + 2xy = 0. \tag{2.76}$$

Разрешая его относительно производной y', получим два уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной:

$$y' = y, \tag{2.77}$$

$$y' = 2x, \tag{2.78}$$

правые части которых удовлетворяют условиям теорем 2.3 и 2.4 существования и единственности решения начальной задачи в любой точке плоскости (x, y). Общие решения уравнений (2.77) и (2.78) имеют вид

$$y = C_1 e^x \tag{2.79}$$

и

$$y = x^2 + C_2, \tag{2.80}$$

где постоянные C_1 и C_2 определяются из начальных условий. Как легко видеть, через любую точку плоскости (x, y) проходят как интегральная кривая семейства (2.79), так и интегральная кривая семейства (2.80), причем в точках прямой $y = 2x$ кривые этих семейств имеют общую касательную $y'(x_0) = 2x_0$, что представлено на рис. 5: *1* — кривая $y = x^2$, *2* — кривая $y = x^2 + 1$, *3* — кривая $y = (2/e)e^x$, *4* — кривая $y = (2/e)^2 e^x$, *5* — прямая $y = 2x$. Заметим, что в точке $(0, 0)$ интегральная кривая $y = x^2$ касается прямой $y \equiv 0$, являющейся частным решением уравнения (2.77), которое может быть получено из формулы (2.79) при $C_1 = 0$. Эта же интегральная кривая $y = x^2$ пересекается в точке $x = 2$, $y = 4$ с интегральной кривой $y = (2/e)^2 e^x$ семейства (2.79), причем в этой точке обе кривые имеют общую касательную $y' = 4$. Прямая $y = 2x$ представляет собой геометрическое место точек, в которых нарушены условия единственности решения уравнения (2.76), так как в этих точках не выполнено условие б), поскольку $\frac{\partial F}{\partial y'}|_{y=2x} = 0$.

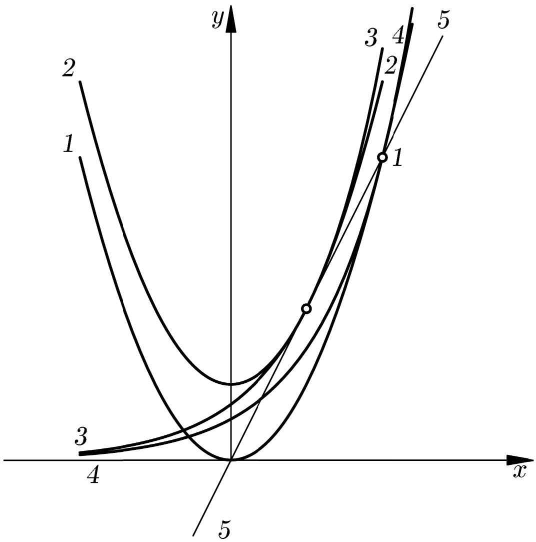

Рис. 5

2. Интегрирование уравнения, неразрешенного относительно производной, путем введения параметра. Доказанная в предыдущем пункте теорема 2.5 гарантирует при выполнении определенных условий возможность сведения исходного уравнения (2.67) к уравнению (2.68) и разрешимость последнего. Однако практическая реализация этой возможности и последующее интегрирование полученного уравнения (2.72) часто вызывают значительные трудности. Поэтому в ряде случаев представляются более удобными другие способы интегрирования уравнения (2.67). Начнем со случая, когда уравнение (2.67) легко можно разрешить относительно самой неизвестной функции

$$y(x) = f(x, y'). \tag{2.81}$$

Для дальнейшего удобно ввести обозначение $y' = p$ и переписать (2.81) в виде

$$y(x) = f(x, p(x)). \tag{2.82}$$

Предполагая существование решения $y(x)$ исходного уравнения (2.67), мы можем продифференцировать соотношение (2.82) по независимой переменной x. Тогда получим

$$\frac{dy}{dx} = p(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}. \tag{2.83}$$

Полученное соотношение представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно $\dfrac{dp}{dx}$. Общее решение (2.83) можно записать в виде однопараметрического семейства

$$p(x) = \varphi(x, C). \tag{2.84}$$

Отсюда, используя (2.82), получим семейство решений исходного уравнения (2.67) в виде

$$y = f(x, \varphi(x, C)) \tag{2.85}$$

и для решения начальной задачи остается определить значение постоянной C из начальных условий.

Пример 2.4. Рассмотрим уравнение

$$(y')^2 - xy' + y = 0. \tag{2.86}$$

Очевидно, это уравнение легко переписать в виде (2.82):

$$y = xp - p^2, \tag{2.87}$$

откуда $p = p + (x - 2p)\dfrac{dp}{dx}$, т. е.

$$(x - 2p)\frac{dp}{dx} = 0. \tag{2.88}$$

Уравнение (2.88) имеет семейство решений

$$p(x) = C \tag{2.89}$$

и, кроме того, решение

$$p(x) = x/2. \tag{2.90}$$

Отсюда, учитывая (2.87), получим решения исходного уравнения (2.86) в виде

$$y(x) = Cx - C^2 \tag{2.91}$$

и

$$y(x) = x^2/4. \tag{2.92}$$

Легко проверить, что через точку (x_0, y_0), принадлежащую области существования решения уравнения (2.86), проходят две различные интегральные кривые (2.91), соответствующие двум значениям постоянной C (рис. 6):

$$C = \frac{x_0}{2} \pm \sqrt{\frac{x_0^2}{4} - y_0}.$$

Для выделения единственного решения начальной задачи, проходящего через точку (x_0, y_0), должно быть еще задано значение

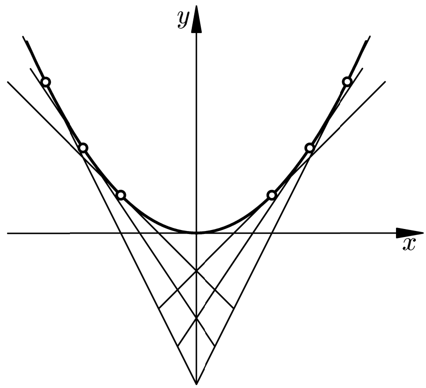

Рис. 6

$y'(x_0) = y'_0$, определяющее направление касательной к интегральной кривой в этой точке. Нетрудно также усмотреть, что решение (2.92) уравнения (2.86) обладает тем свойством, что кривая $y = x^2/4$ в каждой своей точке касается какой-либо кривой (2.91). Это означает, что кривая $y = x^2/4$ представляет собой геометрическое место точек, через которое проходят два решения уравнения (2.86), имеющие общую касательную в этой точке. В точках кривой $y = x^2/4$ нарушается условие б) теоремы 2.5:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{y=x^2/4} = 2y' - x|_{y=x^2/4} = 0. \tag{2.94}$$

Тем самым решение $y = x^2/4$ оказывается в определенном смысле особым решением уравнения (2.86).

Прежде чем переходить к рассмотрению общего случая, отметим, что поскольку в исходном уравнении (2.67) переменные x и y равноправны, то проведенные выше рассмотрения сохраняют силу и в том случае, когда исходное уравнение легко разрешить относительно независимой переменной x. Например, это имеет место в случае так называемого уравнения Лагранжа

$$x\varphi(y') + y\psi(y') = \chi(y'), \tag{2.95}$$

линейного относительно переменных x и y. Частным случаем уравнения Лагранжа и является уравнение, рассмотренное в примере 2.4.

Перейдем теперь к изложению общего метода интегрирования уравнения первого порядка (2.67), неразрешенного относительно производной, путем введения параметра. Обозначив $y' = p$, запишем уравнение (2.67) в виде

$$F(x, y, p) = 0. \tag{2.96}$$

Уравнение (2.96) определяет некоторую поверхность в трехмерном пространстве (x, y, p). Как известно, путем введения двух параметров u, v данная поверхность может быть задана в параметрическом виде

$$x = X(u, v), \quad y = Y(u, v), \quad p = P(u, v). \tag{2.97}$$

В нашем случае функции X, Y и P связаны соотношением (2.96) и соотношением $dy = p\,dx$. Из последнего соотношения получим

$$\frac{\partial Y}{\partial u}du + \frac{\partial Y}{\partial v}dv = P(u, v)\left\{\frac{\partial X}{\partial u}du + \frac{\partial X}{\partial v}dv\right\}. \tag{2.98}$$

Отсюда следует, что величины u и y не могут быть независимыми. Пусть $v = v(u)$. Тогда из (2.98) получим, что связь параметров u и v представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции v:

$$\frac{dv}{du} = \frac{P(u, v)\frac{\partial X}{\partial u} - \frac{\partial Y}{\partial u}}{\frac{\partial Y}{\partial v} - P(u, v)\frac{\partial X}{\partial v}}, \tag{2.99}$$

причем это уравнение — разрешенное относительно производной. Семейство решений уравнения (2.99) можно записать в виде

$$v = \varphi(u, C). \tag{2.100}$$

Тогда в силу (2.97) получим семейство интегральных кривых уравнения (2.67), записанное в параметрической форме:

$$x = X(u, \varphi(u, C)), \quad y = Y(u, \varphi(u, C)), \tag{2.101}$$

что и решает задачу интегрирования уравнения (2.67).

Очевидно, что в том случае, когда исходное уравнение легко разрешить относительно переменной y (переменной x):

$$y = f(x, p), \tag{2.102}$$

в качестве параметров u, v в параметрическом представлении (2.97) следует выбирать оставшиеся переменные x, p (или y, p):

$$x = x, \quad y = f(x, p), \quad p = p. \tag{2.103}$$

Как легко проверить, получающееся при этом уравнение (2.99) для определения функции $p(x)$ будет совпадать с уравнением (2.83).

3. Особые решения уравнения первого порядка, неразрешенного относительно производной. В рассмотренном выше примере 2.4 мы получили особое решение $y = x^2/4$ уравнения первого порядка, неразрешенного относительно производной (2.86), обладающее тем свойством, что во всех его точках нарушена единственность решения начальной задачи Коши. Рассмотрим теперь в общем случае условия существования особого решения.

Множество точек (x, y), в которых нарушается единственность решения уравнения (2.67), будем называть *особым множеством* этого уравнения. Ясно, что в точках особого множества не выполнено по крайней мере одно из условий теоремы 2.5. Чаще всего нарушается условие б), т. е. $\dfrac{\partial F}{\partial y'} = 0$. Тогда при выполнении в точках особого множества условия а) и нарушении условия б) в этих точках одновременно имеют место соотношения

$$F(x, y, p) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p}(x, y, p) = 0. \tag{2.104}$$

Исключив p из соотношений (2.104), получим неявное уравнение так называемой *p-дискриминантной кривой*

$$\Phi(x, y) = 0. \tag{2.105}$$

Будем называть *особым решением* интегральную кривую, во всех точках (x, y) которой $\dfrac{\partial F}{\partial y'} = 0$. Если какая-либо из ветвей p-дискриминантной кривой представляет собой интегральную кривую уравнения (2.67), то она является его особым решением. Заметим, что не обязательно всякая p-дискриминантаая кривая представляет собой особое решение уравнения (2.67), она может и не являться интегральной кривой этого уравнения. Так, например, как легко проверить, в случае примера 2.3 p-дискриминантная кривая $y = 2x$ уравнения (2.76) не является интегральной кривой, а тем самым и особым решением этого уравнения. Найденное в примере 2.4 особое решение $y = x^2/4$ уравнения (2.86) является его p-дискриминантной кривой.

В тех случаях, если множество решений уравнения (2.67) может быть записано в виде однопараметрического семейства

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{2.106}$$

в котором значения постоянной C определяют различные интегральные кривые, и семейство функций (2.106) имеет огибающую $y = y(x)$, то, очевидно, эта огибающая также является интегральной кривой уравнения (2.67) и через каждую точку огибающей проходит интегральная кривая семейства (2.106), имеющая в этой точке общую касательную с огибающей. Тем самым огибающая семейства интегральных кривых (2.106) представляет собой особое решение уравнения (2.67). Как известно, огибающая однопараметрического семейства (2.106) может быть найдена путем исключения параметра C из соотношений

$$\Phi(x,y,C)=0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial C}(x,y,C)=0. \tag{2.107}$$

Полученная при этом кривая $\Psi(x,y)=0$ называется *C-дискриминантной кривой*. Так, найденное в примере 2.4 особое решение $y=x^2/4$ уравнения (2.86) является, как легко проверить, C-дискриминантной кривой семейства решений (2.91).

В заключение заметим, что система соотношений (2.107) определяет не только огибающую семейства (2.106), но и множество кратных точек этого семейства, в которых частные производные $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}$ или не существуют, или одновременно обращаются в нуль. Поэтому условием существования огибающей семейства (2.106), а тем самым и особого решения уравнения (2.67), является существование ограниченных частных производных $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}$, удовлетворяющих условию

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\neq 0. \tag{2.108}$$

§ 4. Теоремы существования и единственности решения нормальной системы

Основные идеи метода ломаных Эйлера могут быть использованы для конструктивного доказательства существования решения не только в случае одного уравнения, разрешенного относительно производной, но и в случае нормальной системы. Эти вопросы и составляют основное содержание настоящего параграфа.

Итак, рассмотрим начальную задачу для нормальной системы уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} &\frac{dy_i}{dt}=f_i(t,y_1,\ldots,y_m),\\ &y_i(t_0)=y_i^0,\quad i=1,2,\ldots,m. \end{aligned} \tag{2.109}$$

Пусть функции $f_i(t,y_1,\ldots,y_m)$ определены в области D, представляющей собой $(m+1)$-мерный параллелепипед

$$D=\{|t-t_0|\leqslant a,\quad |y-y_i^0|\leqslant b_i,\quad (i=1,2,\ldots,m)\}$$

с центром в точке $(t_0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$. Предположим, что в области D функции $f_i(t, y_i, \ldots, y_m)$ непрерывны (и, следовательно, ограничены) и удовлетворяют условию Липшица по переменным $y_1, \ldots, y_m$, то есть,

$$|f_i(t, y_1, \ldots, y_m)| \leqslant M,$$

$$|f_i(t, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m) - f_i(t, y_1, \ldots, y_m)| \leqslant N \sum_{j=1}^{m} |\bar{y}_j - y_j|, \quad (2.110)$$

причем постоянные M и N не зависят от i.

Повторяя рассуждения, проведенные в случае одного уравнения, легко установить, что искомая интегральная кривая (если она существует) не выйдет из области D на отрезке $[t_0, T]$ изменения независимой переменной t, где $T = t_0 + H$, а значение H определяется как

$$H = \min\left\{a, \frac{\min_i b_i}{M}\right\}. \quad (2.111)$$

Для построения ломаной Эйлера на отрезке $[t_0, T]$ разобьем этот отрезок на n частей точками деления $t_0, t_1, \ldots, t_n = T$ и так же, как и в § 2, обозначим $t_i - t_{i-1} = h_i$, $h = \max_i h_i$. На первом шаге «заморозим» функции $f_i(t, y_1, \ldots, y_m)$ в точке $(t_0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$ и, интегрируя полученные уравнения с постоянными правыми частями, найдем значения функций $\bar{y}_i(t)$ на отрезке $[t_0, t_1]$:

$$\bar{y}_i(t) = y_i^0 + f_i(t, y_1^0, \ldots, y_m^0)(t - t_0). \quad (2.112)$$

Найденные функции определяют в $(m+1)$-мерном пространстве переменных $t, y_1, \ldots, y_m$ на участке $[t_0, t_1]$ некоторый прямолинейный отрезок, который является первым звеном ломаной Эйлера.

Значения функций $\bar{y}_i(t)$ в точке $t = t_1$ примем за новые начальные значения и, повторяя вышеописанный алгоритм, получим ломаную Эйлера на отрезке $[t_0, T]$. При помощи оценок, аналогичных оценкам в случае одного уравнения, проведенным в § 2, можно доказать, что построенная по данному алгоритму ломаная Эйлера на отрезке $[t_0, T]$ не выйдет из области D.

Введем понятие ε-приближенного по невязке решения начальной задачи (2.109), аналогичное соответствующему понятию для случая одного уравнения.

Определение. Непрерывная на отрезке $[t_0, T]$ вектор-функция $\widetilde{y}(t) = (\widetilde{y}_1(t), \ldots, \widetilde{y}_m(t))$ с кусочно непрерывными производными

$\frac{d\widetilde{y}_i}{dt}$, график которой целиком лежит в области D, называется ε-*приближенным по невязке решением* начальной задачи (2.109), если

$$\max_i |\widetilde{y}_i(t_0) - y_i^0| \leqslant \varepsilon,$$

и при подстановке функций $\widetilde{y}_i(t)$ в уравнения (2.109) получим

$$\frac{d\widetilde{y}_i}{dt} = f(t, \widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_m) + \psi_i(t), \tag{2.113}$$

где невязки $\psi_i(t)$ удовлетворяют неравенству

$$\max_i \sup_{t\in[t_0,T]} |\psi_i(t)| \leqslant \varepsilon. \tag{2.114}$$

Чтобы доказать теорему существования, так же как и в случае одного уравнения, докажем, что последовательность ломаных Эйлера $\{\bar{y}_{(n)}(t)\}$ при $h \to 0$ образует равномерно сходящуюся на отрезке $[t_0, T]$ последовательность ε_n-приближенных по невязке решений начальной задачи, а предельная вектор-функция этой последовательности $\bar{y}(t)$ удовлетворяет всем условиям исходной задачи (2.109). Это делается путем рассуждении, аналогичных проведенным в § 2.

Лемма 2.3. *Для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\varepsilon_1 > 0$, что все ε_1-приближенные по невязке решения начальной задачи* (2.109) *различаются между собой на отрезке $[t_0, T]$ не более, чем на ε.*

Доказательство. Возьмем два ε_1-приближенных по невязке решения задачи (2.109) $\widetilde{y}_1(t)$ и $\widetilde{y}_2(t)$. Это значит, что

$$\frac{d}{dt}\widetilde{y}_{(1)i} = f_i(t, \widetilde{y}_{(1)1}, \ldots, \widetilde{y}_{(1)m}) + \psi_{(1)i}(t), \tag{2.115}$$

$$\frac{d}{dt}\widetilde{y}_{(2)i} = f_i(t, \widetilde{y}_{(2)1}, \ldots, \widetilde{y}_{(2)m}) + \psi_{(2)i}(t), \tag{2.116}$$

где

$$\max_i |\widetilde{y}_{(1)i}(t_0) - \widetilde{y}_{(2)i}(t_0)| \leqslant 2\varepsilon_1, \tag{2.117}$$

$$\max_i \sup_{t\in[t_0,T]} |\psi_{(1)i}(t) - \psi_{(2)i}(t)| \leqslant 2\varepsilon_1. \tag{2.118}$$

Полагая

$$\widetilde{y}_{(2)i}(t) - \widetilde{y}_{(1)i}(t) = z_i(t), \tag{2.119}$$

$$\psi_{(2)i}(t) - \psi_{(1)i}(t) = \varphi_i(t) \tag{2.120}$$

и вычитая (2.115) из (2.116), получим

$$\frac{dz_i}{dt} = f(t, \widetilde{y}_{(2)1}, \ldots, \widetilde{y}_{(2)m}) - f(t, \widetilde{y}_{(1)1}, \ldots, \widetilde{y}_{(1)m}) + \varphi_i(t). \qquad (2.121)$$

Так как $\widetilde{y}_{(1)i}(t)$ и $\widetilde{y}_{(2)i}(t)$ не выходят из области D, где функция $f_i(t, y_1, \ldots, y_m)$ удовлетворяет условию Липшица (2.110), то имеет место оценка

$$\left|\frac{dz_i}{dt}\right| \leqslant N \sum_{j=1}^{m} |z_j(t)| + 2\varepsilon_1. \qquad (2.122)$$

Введем функцию $\rho(t) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} z_i^2(t)}$ и рассмотрим ее производную

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{m} z_i \frac{dz_i}{dt}.$$

Тогда, учитывая, что $|z_i| \leqslant \rho$, в силу оценки (2.122) получим

$$\left|\frac{d\rho}{dt}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \left|\frac{dz_i}{dt}\right| \leqslant N m^2 \rho + 2m\varepsilon_1, \qquad (2.123)$$

то есть,

$$\left|\frac{d\rho}{dt}\right| \leqslant N m^2 \rho + 2m\varepsilon_1. \qquad (2.124)$$

В силу леммы 2.1 для ρ справедлива оценка

$$\rho(t) \leqslant s(t),$$

где $s(t)$ — решение начальной задачи для линейного уравнения с постоянными коэффициентами

$$\frac{ds}{dt} = N m^2 s + 2m\varepsilon_1, \quad s(t_0) = \rho(t_0). \qquad (2.125)$$

Согласно (2.117) начальное значение $s(t_0)$ удовлетворяет неравенству $s(t_0) = \rho(t_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} z_i^2(t_0)} \leqslant 2\sqrt{m}\varepsilon_1$. Поэтому для $\rho(t)$ окончательно получим

$$\rho(t) \leqslant 2\sqrt{m}\,\varepsilon_1 e^{Nm^2(t-t_0)} + \frac{2\varepsilon_1}{Nm}\big(e^{Nm^2(t-t_0)} - 1\big) \leqslant$$
$$\leqslant 2\varepsilon_1 \Big[\sqrt{m}\, e^{Nm^2 T} + \frac{1}{Nm}\big(e^{Nm^2 T} - 1\big)\Big] = 2\varepsilon_1 \Omega, \qquad (2.126)$$

где постоянная Ω не зависит от ε_1. Очевидно, оценка (2.126) справедлива и для $|z_i(t)|$ $(i = 1, \ldots, m)$. Выбирая $\varepsilon_1 = \varepsilon/(2\Omega)$, мы и получим утверждение леммы.

Определение. Последовательность ε_n-приближенных по невязке решений $\widetilde{y}_{(n)}(t)$ назовем *сходящейся по невязке*, если $\varepsilon_n \to 0$.

Из доказанной леммы следует, что всякая последовательность $\{\widetilde{y}_{(n)}(t)\}$, сходящаяся по невязке, является равномерно сходящейся на отрезке $[t_0, T]$.

Последующие теоремы доказываются полностью аналогично соответствующим теоремам в случае одного уравнения.

Теорема 2.6. *Пусть в начальной задаче*

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, \ldots, y_m), \quad y_i(t_0) = y_i^0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

функции $f_i(t, y_1, \ldots, y_m)$ в области D непрерывны и удовлетворяют условию Липшица по переменным $y_1, \ldots, y_m$. Тогда последовательность $\{\widetilde{y}_{(n)}(t)\}$, сходящаяся по невязке на отрезке $[t_0, T]$, сходится равномерно на этом отрезке к функции $y(t)$, являющейся решением начальной задачи.

Теорема 2.7. *Если выполнены условия теоремы 2.6, то последовательность ломаных Эйлера при $h \to 0$ сходится равномерно на отрезке $[t_0, T]$ к функции $y(t)$, являющейся решением начальной задачи.*

Отсюда следует

Теорема 2.8 (существования). *Если функции $f_i(t, y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 1, \ldots, m)$ в области D непрерывны и удовлетворяют условию Липшица по переменным $y_1, \ldots, y_m$, то на отрезке $[t_0, T]$ существует решение начальной задачи.*

Так же, как и в случае одного уравнения, имеет место

Теорема 2.9 (единственности). *При выполнении условий теоремы 2.8 начальная задача (2.109) имеет на $[t_0, T]$ единственное решение.*

Итак, теоремы существования и единственности решения начальной задачи для нормальной системы полностью доказаны. При этом замечания, сделанные в § 2 по поводу теорем существования и единственности решения начальной задачи для одного уравнения, остаются справедливыми и в случае нормальной системы.

В гл. 1 было показано, что уравнение n-го порядка (1.6) эквивалентно нормальной системе (1.8). Отсюда следует, что если правая часть уравнения (1.6) — функция $f\Big(t, y, \dfrac{dy}{dt}, \ldots, \dfrac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\Big)$ — удовлетворяет условиям теоремы 2.8, то решение начальной задачи для (1.6) существует и единственно.

Особо следует подчеркнуть, что рассмотренный метод доказательства теоремы существования с помощью ломаных Эйлера представляет собой теоретическую основу эффективных алгоритмов численного решения начальной задачи для достаточно сложных систем дифференциальных уравнений, приведенных к нормальному виду. В дальнейшем (в гл. 6) будут рассмотрены и другие, более совершенные в практическом отношении, алгоритмы численного решения дифференциальных уравнений (увеличивающие, например, быстроту сходимости приближений). Сейчас ограничимся примером численного решения задачи для достаточно сложной нормальной системы, которое практически осуществимо только при использовании современных ЭВМ.

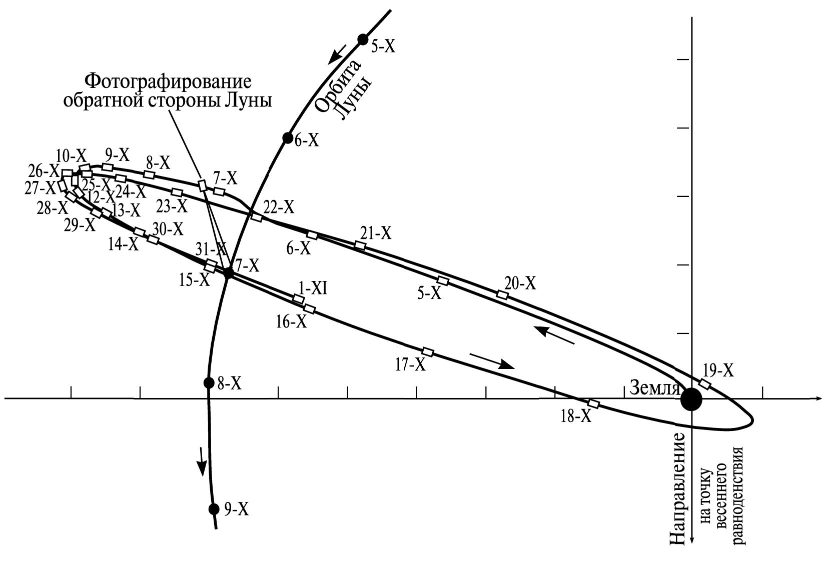

Рис. 7

Рассмотрим задачу о движении ракеты в межпланетном пространстве, испытывающей тяготение со стороны Земли, Луны, Солнца. Такая задача возникает при расчете полета ракеты к Луне. Это движение описывается системой уравнений движения четырех тел типа (1.20), где F_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ — равнодействующая сил ньютоновского притяжения, действующих на i-е тело со стороны всех остальных, причем силами, действующими на небесные тела со стороны ракеты, можно, разумеется, пренебречь. Таким образом, приходим к системе 12 уравнений второго порядка или к нормальной системе из 24-х уравнений с правыми частями, имеющими сложную аналитическую структуру; формулы для правых частей мы здесь не выписываем. Для применения алгоритма Эйлера и других численных алгоритмов достаточно иметь возможность вычислять правые части при различных положениях движущихся тел; при этом конкретный вид аналитических формул для правых частей не имеет значения для метода интегрирования.

На приведенном здесь рис. 7 изображена одна из проекций траектории движения автоматической межпланетной станции, запущенной в СССР 4 октября 1959 г., с помощью которой впервые была сфотографирована обратная сторона Луны.

§ 5. Зависимость решений от начальных значений и параметров

В реальных задачах, связанных с решением дифференциальных уравнений, начальные значения обычно известны лишь с некоторым приближением, так как они определяются экспериментально или вычисляются, а это неизбежно связано с появлением погрешностей. Кроме того, в правые части уравнений могут входить какие-либо параметры, характеризующие физическую природу изучаемой системы (массы, заряды, упругие характеристики и т. п.), и значения данных параметров также определяются приближенно. В связи с этим возникает вопрос о том, как изменяется решение начальной задачи при небольших изменениях начальных значений и параметров и зависит ли оно от этих величин непрерывно. Этот вопрос мы и рассмотрим в данном параграфе. Заметим, что аналогичный вопрос можно поставить и для неограниченного промежутка (t_0, ∞), если решение на нем определено. Этот вопрос составляет содержание так называемой теории устойчивости, которой посвящена специальная глава (гл. 5).

Будем рассматривать начальную задачу для нормальной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, t, \boldsymbol{\mu}), \quad \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m), \quad \boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_m), \tag{2.127}$$

с начальными условиями

$$\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0, \quad \boldsymbol{y}_0 = (y_{10}, \ldots, y_{m0}). \tag{2.128}$$

Здесь $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, ..., \mu_s)$ — вектор, описывающий параметры $\mu_1, ..., \mu_s$, входящие в правую часть системы.

Нас интересует характер зависимости решения этой задачи от $y_{10}, \ldots, y_{m0}$ и $\mu_1, \ldots, \mu_s$. Заметим, что исследование зависимости решения от начальных значений $y_{10}, \ldots, y_{m0}$ можно свести к задаче об изучении зависимости от параметров в правой части системы. В самом деле, сделаем в (2.127) замену

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{z}, \quad t = t_0 + \tau, \tag{2.129}$$

и запишем уравнение для новых неизвестных функций z_i:

$$\begin{gathered} \frac{d\boldsymbol{z}}{d\tau} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{z}, \tau, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{y}_0, t_0), \\ \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{z}, \tau, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{y}_0, t_0) \equiv \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_0 + z, t_0 + \tau, \boldsymbol{\mu}). \end{gathered} \tag{2.130}$$

При $t = t_0$ новая переменная $\tau = 0$ и начальные значения для z_i теперь оказываются фиксированными:

$$\boldsymbol{z}(0) = \boldsymbol{y}(t_0) - \boldsymbol{y}_0 = 0. \tag{2.131}$$

Значения y_{i0} и t_0 входят в правые части (2.130) как параметры наряду с параметрами $\mu_1, \ldots, \mu_s$. Задача сводится, таким образом, к исследованию зависимости z_i от параметров y_{i0}, t_0. Имеет место и обратная редукция: изучение зависимости от параметра можно рассматривать как некоторый частный вид зависимости решений от начальных значений. В самом деле, поскольку параметры $\mu_1, \ldots, \mu_s$ в (2.127) фиксированы и принимают, например, значения μ_{k0} $(k = 1, \ldots, s)$, то к уравнениям (2.127) с начальными условиями (2.128) можно добавить уравнения вида $\frac{d\mu_k}{dt} = 0$ с начальными условиями $\mu_k(t_0) = \mu_{k0}$. Тогда получим новую систему

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, t, \boldsymbol{\mu}), \quad \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = 0, \quad y_i(t_0) = y_{i0}, \quad \mu_k(t_0) = \mu_{k0}. \tag{2.132}$$

Теперь вопрос о зависимости y_i от μ_k сводится к исследованию зависимости решений задачи (2.132) от начальных значений $\mu_{10}, \ldots, \mu_{s0}$.

Ниже мы исследуем зависимость решений от параметров, а заключение о зависимости от начальных значений сделаем, исходя из установленной эквивалентности.

Рассмотрим сначала скалярное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t, \mu) \tag{2.133}$$

со скалярным параметром μ и фиксированным начальным значением

$$y(t_0) = y_0. \tag{2.134}$$

Пусть правая часть $f(y,t,\mu)$ определена в параллелепипеде $D = \{|t-t_0| \leqslant a,\ |y-y_0| \leqslant b,\ |\mu-\mu_0| \leqslant c\}$, непрерывна в D по совокупности переменных и, кроме того, удовлетворяет в D условию Липшица по y:

$$|f(y_1,t,\mu) - f(y_2,t,\mu)| \leqslant N|y_1-y_2|, \tag{2.135}$$

где N — одна и та же постоянная для всех μ из отрезка $|\mu-\mu_0| \leqslant c$.

При каждом фиксированном μ согласно теореме существования на отрезке $[t_0, t_0+H]$, где $H = \min\{a, b/M\}$, $M = \sup_D |f(y,t,\mu)|$, определена интегральная кривая, являющаяся решением начальной задачи (2.133), (2.134). Меняя μ, получим в силу независимости констант M и N от μ, что на $[t_0, t_0+H]$ определено семейство интегральных кривых $y(t,\mu)$.

Будем исследовать зависимость $y(t,\mu)$ от μ. Докажем справедливость следующей теоремы.

Теорема 2.10. *Пусть $f(y,t,\mu)$ определена и непрерывна в D и удовлетворяет условию Липшица* (2.135) *по переменному y. Тогда решение $y(t,\mu)$ задачи* (2.133), (2.134), *определенное на отрезке $[t_0, t_0+H]$, непрерывно по μ при любом μ из отрезка $|\mu-\mu_0| \leqslant c$.*

Доказательство. Теорема будет доказана, если убедимся, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что при $|\Delta\mu| < \delta$ справедливо неравенство

$$|y(t,\mu+\Delta\mu) - y(t,\mu)| < \varepsilon \tag{2.136}$$

для любых μ и $\mu+\Delta\mu$ из отрезка $|\mu-\mu_0| \leqslant c$. Воспользуемся леммой 2.1 о дифференциальных неравенствах. Имеем

$$\frac{d}{dt}y(t,\mu+\Delta\mu) = f(y(t,\mu+\Delta\mu), t, \mu+\Delta\mu), \quad y(t_0,\mu+\Delta\mu) = y_0,$$
$$\frac{d}{dt}y(t,\mu) = f(y(t,\mu),t,\mu), \quad y(t_0,\mu) = y_0.$$

Вычитая одно соотношение из другого, получим для разности $\Delta y = y(t,\mu+\Delta\mu) - y(t,\mu)$

$$\frac{d}{dt}\Delta y = \big[f(y(t,\mu+\Delta\mu),t,\mu+\Delta\mu) - f(y(t,\mu),t,\mu+\Delta\mu)\big] + \\ + \big[f(y(t,\mu),t,\mu+\Delta\mu) - f(y(t,\mu),t,\mu)\big], \quad \Delta y|_{t=t_0} = 0. \tag{2.137}$$

В силу непрерывности $f(y,t,\mu)$ по совокупности аргументов и в силу того, что $|y(t,\mu) - y_0| \leqslant b$ при $|t-t_0| \leqslant H$, для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует $\delta_1(\varepsilon_1)$ такое, что если $|\Delta\mu| < \delta_1$, то

$$\big|f(y(t,\mu),t,\mu+\Delta\mu) - f(y(t,\mu),t,\mu)\big| < \varepsilon_1$$

равномерно относительно $t \in [t_0, t_0 + H]$. Пользуясь этим фактом и условием Липшица, будем иметь

$$\left|\frac{d}{dt}\Delta y\right| < N|\Delta y| + \varepsilon_1. \tag{2.138}$$

Поэтому согласно лемме 2.1 и формуле (2.35) получим

$$|\Delta y| < \frac{\varepsilon_1}{N}\big(e^{N(t-t_0)} - 1\big) \leqslant \frac{\varepsilon_1}{N}\big(e^{NH} - 1\big) < \varepsilon \tag{2.139}$$

при $\varepsilon_1 < \delta_2(\varepsilon)$, т.е. при $|\mu - \mu_0| < \delta_1(\delta_2(\varepsilon)) = \delta(\varepsilon)$.

Теорема доказана.

Замечания.

1. Из процесса доказательства нетрудно видеть, что неравенство (2.136) выполняется равномерно относительно t для $|t - t_0| \leqslant H$, т.е. функция $y(t, \mu)$ непрерывна по μ равномерно относительно t; другими словами, при достаточно малом изменении параметра различие двух интегральных кривых будет равномерно малым на всем исследуемом отрезке $[t_0, t_0 + H]$.

2. Пользуясь доказанной теоремой и теоремой анализа*), нетрудно получить утверждение о непрерывности $y(t, \mu)$ по совокупности переменных t, μ при $|t - t_0| \leqslant H$, $|\mu - \mu_0| \leqslant c$. В самом деле, непрерывность y по μ, равномерная относительно t, только что доказана, а непрерывность y по t, равномерная относительно μ, сразу следует из того, что $\left|\frac{dy}{dt}\right| = |f| \leqslant M$.

3. Если μ является векторной величиной, $f(y, t, \mu)$ определена и непрерывна по совокупности переменных в

$$D = \{|t - t_0| \leqslant a, \quad |y - y_0| \leqslant b, \quad |\mu_k - \mu_k^0| \leqslant c_k\}$$

---

*) Теорема. *Пусть при $\alpha \in A$, $\beta \in B$ задана функция $y(\alpha, \beta)$ и пусть $y(\alpha, \beta)$ непрерывна при любом $\alpha \in A$ равномерно относительно $\beta \in B$ и непрерывна при любом $\beta \in B$ равномерно относительно $\alpha \in A$. Тогда $y(\alpha, \beta)$ непрерывна по совокупности аргументов α, β при $\alpha \in A$, $\beta \in B$.*

Доказательство. Рассмотрим разность $\Delta y = y(\alpha + \Delta\alpha, \beta + \Delta\beta) - y(\alpha, \beta)$. Имеем

$$|\Delta y| \leqslant |y(\alpha + \Delta\alpha, \beta + \Delta\beta) - y(\alpha, \beta + \Delta\beta)| + |y(\alpha, \beta + \Delta\beta) - y(\alpha, \beta)|.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ первое слагаемое справа меньше $\varepsilon/2$ при $|\Delta\alpha| < \delta_1(\varepsilon)$ и любом $\beta + \Delta\beta \in B$, а второе меньше $\varepsilon/2$ при $|\Delta\beta| < \delta_2(\varepsilon)$ и любом $\alpha \in A$, и, таким образом, $|\Delta y| < \varepsilon$ при $|\Delta\alpha| < \delta_1(\varepsilon)$, $|\Delta\beta| < \delta_2(\varepsilon)$.

и удовлетворяет в D условию Липшица по y с постоянной N, не зависящей от μ, то доказанную теорему можно применить, подразумевая под μ одну из компонент μ. Неравенство (2.136) означает непрерывность y по этой компоненте, равномерную относительно t и других компонент μ, а тогда $y(t,\mu)$ согласно замечанию 2 является непрерывной функцией по совокупности аргументов $t,\mu_1,\ldots,\mu_s$.

Остановимся теперь на исследовании зависимости решения от параметра y_0. Пусть этот параметр меняется на отрезке $|y_0-y_0^0|\leqslant\Delta$. Пусть $f(y,t)$ определена и непрерывна в $D=\{|t-t_0|\leqslant a,\ |y-y_0^0|\leqslant b\}$. Тогда из геометрических соображений очевидно, что семейство интегральных кривых $y(t,y_0)$ существует на отрезке $[t_0,t_0+\overline{H}]$, где $\overline{H}=\min\{a,\ (b-\Delta)/M\}$, $M=\sup_D|f|$. Сведем эту задачу указанным выше способом к уже рассмотренной задаче о зависимости решения от μ (вводя $z=y-y_0$ и полагая $y_0=\mu$). Получим тогда как следствие теоремы 2.10, что функция $y(t,y_0)$, определенная на $[t_0,t_0+\overline{H}]$, непрерывна по y_0 при любом y_0 из промежутка $|y_0-y_0^0|\leqslant\Delta$.

Точно так же можно рассмотреть зависимость решения от параметра t_0, который меняется на отрезке $|t_0-t_0^0|\leqslant\delta$, и получить, что $y(t,t_0)$, определенная на отрезке $[t_0^0,t_0^0+\overline{\overline{H}}]$, где $\overline{\overline{H}}=\min\{a-\delta,$ $\frac{b}{M}-\delta\}$ непрерывна по t_0 при $|t_0-t_0^0|\leqslant\delta$.

Если y является векторной величиной, то справедливы аналогичные результаты, которые могут быть доказаны, если воспользоваться той же леммой 2.1 о дифференциальных неравенствах и соображениями, имевшими место при доказательстве теоремы существования для системы уравнений.

Синтезируя все сказанное, приходим к следующему утверждению для общего случая (2.127), (2.128).

Пусть t_0,y_{i0} являются параметрами, меняющимися в области $|t_0-t_0^0|\leqslant\delta$, $|y_{i0}-y_{i0}^0|\leqslant\Delta_i$, а входящий в систему вектор-параметр μ меняется в области $|\mu_k-\mu_k^0|\leqslant c_k$. Пусть правые части системы (2.127) *непрерывны по совокупности аргументов в параллелепипеде*

$$D=\big\{|t-t_0^0|\leqslant a,\quad |y_i-y_{i0}^0|\leqslant b_i,\quad |\mu_k-\mu_k^0|\leqslant c_k\big\}\tag{2.140}$$

и удовлетворяют в D условию Липшица по $y_1,\ldots,y_m$.

Тогда функции $y_i(t,\ t_0,\ y_{10},\ldots,y_{m0},\mu_1,\ldots,\mu_s)$, определенные на отрезке $[t_0^0,t_0^0+H]$, где

$$H=\min\Big\{a-\delta;\ \frac{\min(b_i-\Delta_i)}{\max M_i}-\delta\Big\},\qquad M_i=\sup_D|f_i|,$$

и являющиеся решением задачи (2.127), (2.128), *непрерывны по совокупности аргументов при*

$$|t-t_0^0|\leqslant H,\quad |t_0-t_0^0|\leqslant\delta,\quad |y_{i0}-y_{i0}^0|\leqslant\Delta_i,\quad |\mu_k-\mu_k^0|\leqslant c_k.$$

Свойство непрерывности по параметрам имеет существенное значение для возможности использования начальной задачи (2.127), (2.128) в качестве математической модели многих естественно-научных задач. Действительно, как уже отмечалось, на практике начальные данные и параметры, входящие в правые части уравнений, как правило, заданы не точно, а лишь с некоторым приближением. Однако в силу теоремы о непрерывной зависимости от параметров малое изменение начальных данных и правых частей уравнений системы приводит соответственно к малым изменениям решения. Это и оправдывает использование полученных решений задачи (2.127), (2.128) для интерпретации того реального процесса, математической моделью которого служит данная система.

Перейдем к исследованию возможности дифференцирования решений по параметрам и начальным значениям. Рассмотрим этот вопрос опять-таки для скалярного уравнения и скалярного параметра μ. Дополнительно к условиям теоремы 2.10 потребуем, чтобы $f(y,t,\mu)$ в области D обладала непрерывными частными производными $f_y(y,t,\mu)$ и $f_\mu(y,t,\mu)$.

Если бы решение $y(t,\mu)$ задачи (2.133), (2.134) обладало производной по параметру μ, то, подставив $y(t,\mu)$ в (2.133), (2.134) и дифференцируя полученные тождества по μ, мы имели бы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial \mu} = f_y\big(y(t,\mu),t,\mu\big)\frac{\partial y}{\partial \mu} + f_\mu\big(y(t,\mu),t,\mu\big), \tag{2.141}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \mu}(t_0,\mu) = 0. \tag{2.142}$$

Убедимся, что при наложенных на $f(y,t,\mu)$ дополнительных условиях $\dfrac{\partial y}{\partial \mu}$ действительно существует и удовлетворяет уравнению (2.141) и начальному условию (2.142). Для этого рассмотрим начальную задачу

$$\frac{dz}{dt} = f_y\big(y(t,\mu),t,\mu\big)z + f_\mu\big(y(t,\mu),t,\mu\big), \tag{2.143}$$

$$z(t_0,\mu) = 0, \tag{2.144}$$

для новой неизвестной функции $z(t,\mu)$. Уравнение (2.143) линейно относительно z и его коэффициенты являются непрерывными функциями t при $|t-t_0| \leqslant H$, где непрерывна $y(t,\mu)$. Поэтому решение $z(t,\mu)$ начальной задачи (2.143), (2.144) может быть выписано в явном виде по формуле (2.29) и является непрерывной функцией t при $|t-t_0| \leqslant H$.

Обозначим

$$\frac{\Delta y}{\Delta \mu} = \frac{y(t,\mu+\Delta\mu) - y(t,\mu)}{\Delta \mu} = w(t,\mu,\Delta\mu). \tag{2.145}$$

Убедимся, что $\lim_{\Delta\mu\to 0} w(t,\mu,\Delta\mu) = z(t,\mu)$. Отсюда следует, что производная $\dfrac{\partial y}{\partial \mu}$ существует и равна $z(t,\mu)$, т. е. действительно удовлетворяет уравнению (2.141) и начальному условию (2.142).

Пользуясь (2.137), при $0 \leqslant \theta_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta_2 \leqslant 1$ имеем

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{f\big(y(t,\mu+\Delta\mu),t,\mu+\Delta\mu\big) - f\big(y(t,\mu),t,\mu+\Delta\mu\big)}{\Delta\mu} + \\ &\quad + \frac{f\big(y(t,\mu),t,\mu+\Delta\mu\big) - f\big(y(t,\mu),t,\mu\big)}{\Delta\mu} = \\ &= f_y\big(y(t,\mu)+\theta_1\Delta y, t, \mu+\Delta\mu\big)w \\ &\quad + f_\mu\big(y(t,\mu),t,\mu+\theta_2\Delta\mu\big). \end{aligned} \tag{2.146}$$

Очевидно,

$$w|_{t=t_0} = 0. \tag{2.147}$$

Составим уравнение относительно разности $w - z$. Заметим предварительно, что в силу непрерывности f_y и f_μ и непрерывности $y(t,\mu)$ имеет место представление

$$f_y\big(y(t,\mu)+\theta_1\Delta y, t,\mu+\Delta\mu\big) = f_y\big(y(t,\mu),t,\mu\big) + p(t,\mu,\Delta\mu),$$

где $|p| < \varepsilon_1$ при $|\Delta\mu| < \delta_1(\varepsilon_1)$ равномерно относительно t. И точно так же

$$f_\mu\big(y(t,\mu),t,\mu+\theta_2\Delta\mu\big) = f_\mu\big(y(t,\mu),t,\mu\big) + q(t,\mu,\Delta\mu),$$

где $|q| < \varepsilon_1$ при $|\Delta\mu| < \delta_2(\varepsilon_1)$ равномерно относительно t. Вычитая (2.143), (2.144) из (2.146), (2.147), получим теперь следующее уравнение относительно $w - z$:

$$\frac{d}{dt}(w-z) = f_y\big(y(t,\mu),t,\mu\big)(w-z) + p(w-z) + pz + q, \tag{2.148}$$

при этом

$$(w-z)|_{t=t_0} = 0. \tag{2.149}$$

Так как переменная z ограничена, то $|pz+q| < \varepsilon_2$ при $|\Delta\mu| < \delta_3(\varepsilon_2)$. Кроме того, так как $|f_y| \leqslant Q$, то $|f_y + p| < Q + \varepsilon_1$. Поэтому

$$\left|\frac{d}{dt}(w-z)\right| < (Q+\varepsilon_1)|w-z| + \varepsilon_2 \tag{2.150}$$

и для оценки $w - z$ можно опять воспользоваться леммой 2.1. В результате получим

$$|w-z| < \frac{\varepsilon_2}{Q+\varepsilon_1}\Big(e^{(Q+\varepsilon_1)H} - 1\Big) < \varepsilon \tag{2.151}$$

при $|\Delta\mu| < \delta(\varepsilon)$ для всех $t \in [t_0, t_0+H]$, что и требовалось.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2.11. *Пусть $f(y,t,\mu)$ определена и непрерывна по совокупности аргументов в области $D = \{|t-t_0| \leqslant a,\ |y-y_0| \leqslant b,\ |\mu-\mu_0| \leqslant c\}$ вместе с частными производными $f_y(y,t,\mu)$ и $f_\mu(y,t,\mu)$. Тогда решение $y(t,\mu)$ начальной задачи* (2.133), (2.134) *при каждом μ из промежутка $|\mu-\mu_0| \leqslant c$ имеет производную по μ, которая удовлетворяет уравнению* (2.141) *и начальному условию* (2.142), *получаемым дифференцированием уравнения* (2.133) *и начального условия* (2.134) *по μ.*

Уравнение (2.141) часто называют уравнением в вариациях по параметру μ для уравнения (2.133).

Замечание. Коэффициенты уравнения в вариациях (2.141) являются непрерывными по совокупности аргументов t, μ в силу требований, наложенных на f, и замечания 2 к теореме 2.10. Поэтому, применяя к задаче (2.141), (2.142) теорему 2.10, получим утверждение о непрерывности $\dfrac{\partial y}{\partial t}$ по t и μ.

Совершенно аналогичным образом может быть исследован вопрос о существовании производной по начальному значению y_0. В результате получим, что $\dfrac{\partial y}{\partial y_0}$ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial y_0} = f_y\big(y(t,y_0),t\big)\frac{\partial y}{\partial y_0}, \tag{2.152}$$

полученному дифференцированием (2.133) по y_0. Свободный член в этом уравнении отсутствует, так как y_0 в правую часть (2.133) явным образом не входит. Начальные значения для $\dfrac{\partial y}{\partial y_0}$ будут, напротив, отличными от нуля, а именно, дифференцируя (2.134) по y_0, получим

$$\left.\frac{\partial y}{\partial y_0}\right|_{t=t_0} = 1. \tag{2.153}$$

Может быть исследован вопрос о дифференцировании решения по начальному значению t_0. Производная $\dfrac{\partial y}{\partial t_0}$ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial t_0} = f_y\big(y(t,t_0),t\big)\frac{\partial y}{\partial t_0}, \tag{2.154}$$

полученному дифференцированием уравнения (2.133) по t_0. Чтобы получить начальные условия, заменим исходную задачу (2.133), (2.134) интегральным уравнением

$$y(t,t_0) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f\big(y(\tau,t_0),\tau\big)\,d\tau.$$

Дифференцируя по t_0, будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t_0} y(t, t_0) = -f\big(y(t, t_0), t\big) + \int\limits_{t_0}^{t} f_y\big(y(\tau, t_0), \tau\big) \frac{\partial y}{\partial t_0}\, d\tau.$$

Отсюда, полагая $t = t_0$, получим

$$\left.\frac{\partial y}{\partial t_0}\right|_{t=t_0} = -f\big(y(t_0, t_0), t_0\big). \tag{2.155}$$

Все сказанное сохраняет силу и для общего случая (2.127), (2.128) при условии, что в области D (см. (2.140)) f_i обладают непрерывными частными производными по всем $y_1, \ldots, y_m$ и по тому из параметров, по которому производится дифференцирование. Так, например, производные $\dfrac{\partial y_i}{\partial \mu_k}$ удовлетворяют системе уравнений в вариациях

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial \mu_k} = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial \mu_k} + \frac{\partial f_i}{\partial \mu_k}, \qquad \left.\frac{\partial y_i}{\partial \mu_k}\right|_{t=t_0} = 0. \tag{2.156}$$

Вопрос о существовании и непрерывности производных высших порядков исследуется аналогично. Можно показать, что существование непрерывных частных производных до порядка k от функций f_i по $y_1, \ldots, y_m$, $\mu_1, \ldots, \mu_s$ обеспечивает существование непрерывных частных производных k-го порядка по параметрам $y_{10}, \ldots, y_{m0}$, $\mu_1, \ldots, \mu_s$ от решения задачи (2.127), (2.128).

Замечание. Имеет место

Теорема Пуанкаре. *Если функции f_i являются аналитическими функциями своих аргументов, то и решение задачи* (2.127), (2.128) *оказывается аналитически зависящим от параметров.*

§ 6. Метод последовательных приближений (метод Пикара)

Рассматривая в § 2 начальную задачу Коши для одного уравнения, мы доказали существование и единственность решения этой задачи методом ломаных Эйлера, представляющим собой одновременно и эффективный алгоритм численного решения. В настоящем параграфе мы вернемся к проблеме существования и единственности решения начальной задачи и дадим ее доказательство методом последовательных приближений, основные идеи которого восходят к исследованиям Пикара. Не являясь столь же эффективным в алгоритмическом плане, как метод ломаных Эйлера, метод последовательных приближений обладает большой общностью и находит широкие применения при исследовании вопросов существования и единственности решения задач из различных разделов математики. Поэтому знакомство с основными идеями этого метода на примере рассматриваемой в данном параграфе задачи целесообразно.

Итак, рассмотрим начальную задачу

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{2.157}$$

где функция $f(x, y)$ задана и непрерывна в прямоугольнике $D = \{|x - x_0| \leqslant a,\ |y - y_0| \leqslant b\}$. Тогда найдется постоянная M такая, что

$$|f(x, y)| \leqslant M, \quad (x, y) \in D. \tag{2.158}$$

Кроме того, предположим, что $f(x, y)$ удовлетворяет в D условию Липшица по y

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant N|y_1 - y_2|, \quad (x, y_1) \in D, \quad (x, y_2) \in D. \tag{2.159}$$

Мы покажем, что при выполнении условий, наложенных на $f(x, y)$, существует одно и только одно решение задачи (2.157). Наше доказательство будет основываться на сведении задачи (2.157) к эквивалентному интегральному уравнению

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi \tag{2.160}$$

и применении к последнему метода последовательных приближений. Указанная эквивалентность задачи (2.157) интегральному уравнению была установлена выше, в § 1 (лемма 1.1).

Перейдем теперь к построению последовательных приближений. В качестве нулевого приближения возьмем произвольную непрерывную на отрезке $[x_0, X]$ функцию $y_{(0)}(x)$, график которой на $[x_0, X]$, $X = x_0 + H$, целиком лежит в области D, и определим последовательные приближения $y_{(n)}(x)$ соотношением

$$y_{(n)}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y_{(n-1)}(\xi))\, d\xi. \tag{2.161}$$

Как и в § 2, значение H определяется из условия $H = \min\{a, b/M\}$. Легко доказать, что при выбранном начальном приближении графики функций $y_{(n)}(x)$ на отрезке $[x_0, X]$ также целиком лежат в области D. Действительно,

$$y_{(1)}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y_{(0)}(\xi))\, d\xi; \tag{2.162}$$

так как график $y_{(0)}(x)$ лежит в области D, то в силу оценки (2.158) получим
$$|y_{(1)} - y_0| \leqslant M(x - x_0) \leqslant MH \leqslant b. \tag{2.163}$$
Отсюда следует, что график функции $y_{(1)}(x)$ на отрезке $[x_0, X]$ не выходит из области D. Повторяя проведенные выше рассуждения, методом математической индукции установим справедливость высказанного утверждения для любого приближения.

Лемма 2.4. *Если непрерывная в области D функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию* (2.159), *то построенная по формуле* (2.161) *последовательность $\{y_{(n)}(x)\}$ сходится равномерно на $[x_0, X]$.*

Доказательство. Рассмотрим ряд
$$S(x) = y_{(0)}(x) + \left[y_{(1)}(x) - y_{(0)}(x)\right] + \left[y_{(n)}(x) - y_{(n-1)}(x)\right] + \ldots \tag{2.164}$$
Очевидно, n-я частичная сумма $S_n(x)$ ряда совпадает с n-м членом последовательности $\{y_{(n)}(x)\}$. Оценим члены ряда. Очевидно,
$$|y_{(1)}(x) - y_{(0)}(x)| \leqslant |y_{(1)}(x) - y_0| + |y_{(0)}(x) - y_0| \leqslant 2b,$$
$$|y_{(2)}(x) - y_{(1)}(x)| \leqslant \int\limits_{x_0}^{x} |f(\xi, y_{(1)}(\xi)) - f(\xi, y_{(0)}(\xi))|\, d\xi.$$
Тогда, в силу условия (2.159), имеет место оценка
$$|y_{(2)}(x) - y_{(1)}(x)| \leqslant N \int\limits_{x_0}^{x} \left|y_{(1)}(\xi) - y_{(0)}(\xi)\right| d\xi \leqslant 2bN(x - x_0). \tag{2.165}$$
Аналогично
$$\left|y_{(3)}(x) - y_{(2)}(x)\right| \leqslant N \int\limits_{x_0}^{x} \left|y_{(2)}(\xi) - y_{(1)}(\xi)\right| d\xi \leqslant$$
$$\leqslant 2bN^2 \int\limits_{x_0}^{x} (\xi - x_0)\, d\xi = 2bN^2 \frac{(x - x_0)^2}{2!}.$$
Методом индукции получим для n-го члена оценку
$$\left|y_{(n)}(x) - y_{(n-1)}(x)\right| \leqslant 2bN^{n-1} \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{2.166}$$
Из оценки (2.166) следует, что на отрезке $[x_0, X]$ члены функционального ряда мажорируются членами сходящегося числового ряда
$$\left|y_{(n)}(x) - y_{(n-1)}(x)\right| \leqslant 2bN^{n-1} \frac{H^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{2.167}$$
что и является достаточным признаком равномерной сходимости ряда (2.164). Лемма доказана.

Доказанная лемма позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 2.12 (существования). *Если функция* $f(x,y)$ *непрерывна в* D *и удовлетворяет условию Липшица* (2.159), *то на отрезке* $[x_0, X]$ *существует решение начальной задачи* (2.157).

Доказательство. В силу леммы 1.1 достаточно доказать существование на отрезке $[x_0, X]$ решения интегрального уравнения (2.160). Согласно лемме 2.4 последовательность $\{y_{(n)}(x)\}$, построенная по формуле (2.161), сходится равномерно на $[x_0, X]$. Так как все члены последовательности $\{y_{(n)}(x)\}$ по построению являются непрерывными функциями, то и предельная функция $y(x)$ непрерывна на $[x_0, X]$. Равномерная на $[x_0, X]$ сходимость последовательности $\{y_{(n)}\}$ является достаточным условием возможности предельного перехода в формуле (2.161). Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим, что предельная функция последовательности $\{y_{(n)}(x)\}$

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_{(n)}(x) \tag{2.168}$$

удовлетворяет интегральному уравнению (2.160), эквивалентному исходной задаче (2.157). Теорема доказана.

Перейдем к рассмотрению вопроса единственности решения.

Теорема 2.13 (единственности). *Интегральное уравнение* (2.160) *имеет не более одного непрерывного на* $[x_0, X]$ *решения.*

Доказательство. Предположим, что уравнение (2.160) имеет на $[x_0, X]$ два различных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, и составим их разность

$$z(x) = y_1(x) - y_2(x). \tag{2.169}$$

Очевидно,

$$z(x) = \int_{x_0}^{x} \{f(\xi, y_1(\xi)) - f(\xi, y_2(\xi))\}\, d\xi, \quad x \in [x_0, X]. \tag{2.170}$$

Будем сначала рассматривать (2.170) на отрезке $[x_0, x_1]$, значение x_1 выберем в дальнейшем.

Воспользовавшись условием Липшица (2.159), получим

$$\begin{aligned} |z(x)| &\leqslant N(x - x_0) \sup_{[x_0,x_1]} |y_1(\xi) - y_2(\xi)| \leqslant \\ &\leqslant N(x_1 - x_0) \sup_{[x_0,x_1]} |z(\xi)|, \quad x \in [x_0, x_1]. \end{aligned} \tag{2.171}$$

Отсюда

$$\sup_{[x_0,x_1]} |z(x)| \leqslant N(x_1 - x_0) \sup_{[x_0,x_1]} |z(x)|. \tag{2.172}$$

Выберем теперь x_1 так, чтобы $N(x_1 - x_0) < 1$. Тогда (2.172) возможно лишь при условии, что

$$\sup_{[x_0,x_1]} |z(x)| = 0, \quad \text{т.е.} \quad z(x) \equiv 0 \text{ при } x \in [x_0, x_1],$$

и (2.170) можно записать в виде

$$z(x) = \int\limits_{x_1}^{x} \big\{ f(\xi, y_1(\xi)) - f(\xi, y_2(\xi)) \big\}\, d\xi, \quad x \in [x_1, X]. \qquad (2.173)$$

Повторяя проведенные рассуждения необходимое число раз, убеждаемся, что $z(x) \equiv 0$ при $x \in [x_0, X]$, что и доказывает теорему.

Сделаем несколько замечаний к доказанным теоремам.

Замечания.

1. Мы доказали теорему существования, показав, что при любом нулевом приближении $y_0(x)$, представляющем собой непрерывную на $[x_0, X]$ функцию, график которой не выходит из области D, последовательность $\{y_{(n)}\}$ сходится к решению исходной задачи. В качестве нулевого приближения $y_{(0)}(x)$ в ряде случаев удобно бывает выбрать начальное значение y_0, положив $y_{(0)}(x) \equiv y_0$.

2. Метод последовательных приближений может быть использован не только для доказательства существования, но и для построения решения конкретных задач. При этом эффективность его применения определяется как классом функций $f(x, y)$, для которых разработаны эффективные алгоритмы вычисления правой части формулы (2.161), так и выбором начального приближения.

3. Мы рассмотрели применение метода последовательных приближений для доказательства существования и единственности решения начальной задачи для одного скалярного уравнения первого порядка. Аналогичные рассмотрения могут быть проведены и в случае начальной задачи для нормальной системы.

§ 7. Принцип сжимающих отображений. Теорема о неподвижной точке

Рассмотренный в предыдущем параграфе метод последовательных приближений основывается на общем математическом принципе, известном под названием «принцип сжимающих отображений», основные идеи которого будут изложены в настоящем параграфе.

Будем рассматривать произвольное полное метрическое пространство М. Пространство M называется *метрическим*, если каждой паре X, Y элементов этого пространства поставлено в соответствие число $\rho(x, y)$, обладающее следующими свойствами:

1) $\rho(x, y) \geqslant 0$, причем $\rho(x, y) = 0$ только при $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) для любых $x, y, z \in M$ имеет место неравенство треугольника

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Число $\rho(x, y)$ обычно называется расстоянием между элементами x и y.

Последовательность $\{x_m\}$ элементов пространства M называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$ такое, что при $m > N(\varepsilon)$ и любом $p > 0$ справедливо неравенство $\rho(x_m, x_{m+p}) < \varepsilon$. Метрическое пространство называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность $\{x_m\}$ элементов этого пространства сходится к некоторому элементу $x \in M$, т.е. существует $x \in M$ такое, что $\lim_{m\to\infty} \rho(x, x_m) = 0$ (обозначается $x = \lim_{m\to\infty} x_m$).

Примером полного метрического пространства является пространство непрерывных на сегменте $x \in [a, b]$ функций $y(x)$, в котором расстояние $\rho(y, z)$ между элементами $y(x)$ и $z(x)$ задается в виде

$$\rho(y, z) = \sup_{[a,b]} |y(x) - z(x)|. \tag{2.174}$$

Выполнение свойств 1) и 2) очевидно. Проверим, что выполнено 3). Для любого $x \in [a, b]$ имеем

$$|y(x) - z(x)| \leqslant |y(x) - u(x)| + |u(x) - z(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{x\in[a,b]} |y(x) - u(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |u(x) - z(x)|.$$

Но так как, в силу непрерывности, $\sup_{x\in[a,b]} |y(x) - z(x)|$ достигается при некотором $x^* \in [a, b]$, то

$$\sup_{x\in[a,b]} |y(x) - z(x)| = |y(x^*) - z(x^*)|$$

и поэтому

$$\sup_{x\in[a,b]} |y(x) - z(x)| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} |y(x) - u(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |u(x) - z(x)|.$$

Принцип сжимающих отображений является мощным методом исследования проблем существования и единственности решения функциональных уравнений в метрических пространствах.

Пусть в полном метрическом пространстве M задан оператор A, обладающий следующими свойствами:

а) оператор A отображает пространство M в себя, т. е. переводит точки пространства M в точки того же пространства:

$$Ax = y \quad (x, y \in M); \tag{2.175}$$

б) оператор A сближает элементы пространства M, т. е. для любой пары x_1, x_2 элементов пространства M имеет место неравенство

$$\rho\,(Ax_1, Ax_2) \leqslant \alpha\rho\,(x_1, x_2), \tag{2.176}$$

где $\alpha < 1$.

Имеет место

Т е о р е м а 2.14 (принцип сжимающих отображений). *Если в полном метрическом пространстве M задан оператор A, удовлетворяющий условиям* а) *и* б), *то функциональное уравнение*

$$Ax = x \tag{2.177}$$

в пространстве M имеет единственное решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольный элемент $x_0 \in M$ и построим последовательность $\{x_n\}$:

$$x_n = Ax_{n-1}. \tag{2.178}$$

Докажем, что так построенная последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной. Действительно,

$$\begin{aligned} \rho\,(x_{n+1}, x_n) = \rho\,(Ax_n, Ax_{n-1}) \leqslant \alpha\rho\,(x_n, x_{n-1}) = \\ = \alpha\rho\,(Ax_{n-1}, Ax_{n-2}) \leqslant \cdots \leqslant \alpha^n\rho\,(x_1, x_0). \end{aligned} \tag{2.179}$$

Пользуясь этой оценкой и неравенством треугольника, получим

$$\begin{aligned} &\rho\,(x_{n+m}, x_n) \\ &\leqslant \rho\,(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + \rho\,(x_{n+m-1}, x_{n+m-2}) + \cdots + \rho\,(x_{n+1}, x_n) \leqslant \\ &\leqslant \alpha^n\rho\,(x_1, x_0)(\alpha^{m-1} + \cdots + 1) = \\ &= \alpha^n\frac{1-\alpha^m}{1-\alpha}\rho\,(x_1, x_0) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho\,(x_1, x_0), \end{aligned} \tag{2.180}$$

что при условии $\alpha < 1$ и доказывает утверждение о фундаментальности последовательности $\{x_n\}$. В силу полноты пространства M отсюда следует сходимость последовательности $\{x_n\}$, т. е. существует $x \in M$ такой, что

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n. \tag{2.181}$$

Рассмотрим теперь элемент $y = Ax$ и покажем, что он совпадает с элементом x. Действительно,

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, y), \tag{2.182}$$

где x_{n+1} — произвольный элемент последовательности $\{x_n\}$. Оценим последнее слагаемое:

$$\rho(x_{n+1}, y) = \rho(Ax_n, Ax) \leqslant \alpha\rho(x_n, x). \tag{2.183}$$

В силу доказанной выше сходимости последовательности $\{x_n\}$ для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что для всех $n > N$ $\rho(x_n, x) < \varepsilon/2$.

Тогда из (2.182) следует, что

$$\rho(x, y) < \varepsilon, \tag{2.184}$$

откуда в силу произвольности ε получаем $\rho(x, y) = 0$, т. е. $x = y$, следовательно, решение уравнения (2.177) существует.

Доказательство единственности решения уравнения (2.177) проведем от противного. Пусть x и $\bar{x}$ — два различных решения этого уравнения:

$$Ax = x, \quad A\bar{x} = \bar{x}. \tag{2.185}$$

Рассмотрим

$$\rho(x, \bar{x}) = \rho(Ax, A\bar{x}) \leqslant \alpha\rho(x, \bar{x}). \tag{2.186}$$

Но при $\alpha < 1$ неравенство (2.186) возможно лишь при $\rho(x, \bar{x}) = 0$, т. е. при $x = \bar{x}$. Итак, теорема доказана полностью.

Доказанная теорема имеет простую геометрическую интерпретацию. Если рассматривать элементы метрического пространства как точки некоторого множества, то сжимающее свойство б) оператора A означает, что расстояние $\rho(y_1, y_2)$ между образами $y_1 = Ax_1$, $y_2 = Ax_2$ точек x_1 и x_2 меньше расстояния $\rho(x_1, x_2)$ между исходными точками x_1 и x_2. Поэтому, когда строим последовательность $\{x_n\}$ по формуле (2.178), расстояния между соседними точками при возрастании номера n неограниченно уменьшаются и в пределе мы получаем неподвижную точку x, которая оператором A переводится сама в себя, $Ax = x$.

Применим теорему о неподвижной точке для доказательства существования и единственности решения начальной задачи

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{2.187}$$

которая, как мы установили в предыдущем параграфе, эквивалентна интегральному уравнению

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi. \tag{2.188}$$

Рассмотрим оператор

$$Ay \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi \tag{2.189}$$

в полном метрическом пространстве M непрерывных на отрезке $[x_0, X]$ функций $y(x)$. Покажем, что оператор A удовлетворяет условиям а) и б). В предыдущем параграфе было показано, что если функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $D = \{|x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b\}$ и удовлетворяет в D условию Липшица по y, то применение оператора A к непрерывной на $[x_0, X]$ функции $y(x)$, график которой не выходит из D, дает также непрерывную функцию $Ay(x)$, график которой не выходит из D. Тем самым оператор A удовлетворяет условию а). Остается проверить сжимающее свойство оператора A. Для этого рассмотрим

$$\rho\,(Ay_1, Ay_2) = \sup_{x\in[x_0,X]} \left| \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_1(\xi))\, d\xi - \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_2(\xi))\, d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x\in[x_0,X]} \int_{x_0}^{x} \big| f(\xi, y_1(\xi)) - f(\xi, y_2(\xi)) \big|\, d\xi. \tag{2.190}$$

Воспользовавшись условием Липшица для функции $f(x, y)$, получим

$$\rho\,(Ay_1, Ay_2) \leqslant N \sup_{x\in[x_0,X]} \int_{x_0}^{x} |y_1(\xi) - y_2(\xi)|\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant N|x - x_0| \sup_{x\in[x_0,X]} |y_1(x) - y_2(x)| \leqslant NH\rho\,(y_1, y_2). \tag{2.191}$$

Выберем теперь H таким, чтобы удовлетворялось условие

$$NH = \alpha < 1. \tag{2.192}$$

Тогда оператор A будет сжимающим и в силу теоремы 2.14 мы можем утверждать существование и единственность решения начальной задачи (2.187) на отрезке $[x_0, X]$. Распространение решения на больший отрезок производится рассмотренными выше методами.

З а м е ч а н и е. Принцип сжимающих отображений был применен для доказательства существования и единственности решения начальной задачи (2.187) для одного скалярного уравнения. С помощью принципа сжимающих отображений легко доказать аналогичную теорему и в случае нормальной системы.

ГЛАВА 3

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Уравнение движения маятника как пример линейного уравнения. Основные свойства линейного уравнения с постоянными коэффициентами

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x). \tag{3.1}$$

Это уравнение обладает рядом замечательных свойств, облегчающих его исследование, а в ряде случаев и решение. Изучение этих свойств и составляет содержание настоящей главы.

В приложениях линейные уравнения естественно получаются, если пренебречь членами более высокого порядка (см. § 2 гл. 1).

Ознакомимся с основными свойствами линейного уравнения на примере уравнения маятника (см. п. 2 § 2 гл. 1)

$$y'' + ay' + ky = f(t), \quad \alpha > 0,\ k > 0, \tag{3.2}$$

которое является линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим сначала случай $f = 0$. В этом случае уравнение называется *однородным.* Физически это означает, что маятник движется свободно, на него не действуют внешние (вынуждающие) силы,

$$y'' + ay' + ky = 0. \tag{3.3}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде $y = e^{\lambda t}$, где λ — некоторая неизвестная заранее постоянная. Подставляя решение искомого вида в (3.3) и сокращая на $e^{\lambda t}$, получим

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + k = 0. \tag{3.4}$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением* дифференциального уравнения (3.3). Ему должно удовлетворять λ для того, чтобы $e^{\lambda t}$ было решением (3.3). Решая уравнение (3.4), получим

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4k}}{2}.$$

Исследуем разные случаи.

а) $\alpha^2 - 4k > 0$. Физически это соответствует достаточно сильному трению (сопротивлению) среды. Оба корня λ_1 и λ_2 в этом случае действительны, различны и отрицательны, и им отвечают два решения $y_{(1)} = e^{\lambda_1 t}$ и $y_{(2)} = e^{\lambda_2 t}$.

Рассмотрим начальную задачу

$$y(0) = y_0^0, \quad y'(0) = y_1^0. \tag{3.5}$$

Для любых двух n раз дифференцируемых функций $y_1(x)$, $y_2(x)$ справедливо тождество (C_1 и C_2 — константы)

$$\big(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)\big)^{(n)} = C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)}. \tag{3.6}$$

Основываясь на этом тождестве, нетрудно убедиться, что выражение

$$y = C_1 y_{(1)} + C_2 y_{(2)} = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{3.7}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные (линейная комбинация $y_{(1)}$ и $y_{(2)}$), является решением уравнения (3.3). Эти постоянные можно однозначно определить из начальных условий (3.5). Действительно, подставляя (3.7) в (3.5), имеем

$$y_0^0 = C_1 + C_2, \quad y_1^0 = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2.$$

В силу $\lambda_1 \neq \lambda_2$ определитель этой линейной алгебраической системы относительно C_1 и C_2 отличен от нуля. Полученное таким образом решение начальной задачи

$$y = \frac{\lambda_2 y_0^0 - y_1^0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1 y_0^0 - y_1^0}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t}, \tag{3.8}$$

не осциллируя, приближается с ростом t к положению равновесия $y = 0$.

Так как любое наперед заданное решение уравнения (3.3) удовлетворяет некоторому начальному условию (3.5), а по заданному начальному условию (3.5) однозначно определяется решение (3.8), то можно сказать, что в формуле (3.7) содержится любое решение уравнения (3.3). С другой стороны, при любых значениях постоянных формула (3.7) дает некоторое решение уравнения (3.3). Таким образом, формула (3.7) содержит все решения уравнения (3.3) и только решения этого уравнения. Формулу, обладающую таким свойством, мы будем называть *общим решением*. Формула (3.7) *представляет собой общее решение уравнения* (3.3).

б) $\alpha^2 - 4k < 0$. Физически это соответствует достаточно слабому трению (сопротивлению) среды. В этом случае λ_1 и λ_2 являются комплексно сопряженными: $\lambda_2 = \lambda_1^*$ и

$$y_{(1)} = e^{\lambda_1 t} = e^{-\alpha t/2}\Big(\cos\frac{\beta}{2}t + i\sin\frac{\beta}{2}t\Big), \quad y_{(2)} = y_{(1)}^*,$$

где $\beta = \sqrt{4k - \alpha^2}$.

Пользуясь тождеством (3.6), нетрудно видеть, что $y_1 = \operatorname{Re} y_{(1)}$, $y_2 = \operatorname{Im} y_{(1)}$ также являются решениями уравнения (3.3). Действительно,

$$(y_1 + iy_2)'' + \alpha(y_1 + iy_2)' + k(y_1 + iy_2) =$$
$$= (y_1'' + \alpha y_1' + ky_1) + i(y_2'' + \alpha y_2' + ky_2) = 0,$$

откуда, приравнивая нулю отдельно вещественную и мнимую части, получим требуемое. Возьмем линейную комбинацию y_1 и y_2:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{-\alpha t/2}\cos\frac{\beta}{2}t + C_2 e^{-\alpha t/2}\sin\frac{\beta}{2}t. \tag{3.9}$$

Нетрудно убедиться, что, как и прежде, C_1 и C_2 однозначно определяются условиями (3.5) и, таким образом, (3.9) является общим решением уравнения (3.3). Заметим, что в рассматриваемом случае в качестве общего решения можно по-прежнему взять (3.7), но при этом постоянные C_1, C_2 будут комплексными.

Решение задачи (3.5):

$$y = y_0^0 e^{-\alpha t/2}\cos\frac{\beta}{2}t + \frac{2}{\beta}\Big(y_1^0 + \frac{\alpha}{2}y_0^0\Big)e^{-\alpha t/2}\sin\frac{\beta}{2}t \tag{3.10}$$

описывает колебательный процесс. Колебания затухают по закону $\exp[-\alpha t/2]$. С ростом t это решение также стремится к положению равновесия $y = 0$.

Если $\alpha = 0$ (сопротивление отсутствует), то получаем периодические колебания с частотой $\omega_0 = \sqrt{k}$,

$$y = y_0^0 \cos\omega_0 t + \frac{1}{\omega_0}y_1^0 \sin\omega_0 t. \tag{3.11}$$

в) $\alpha^2 - 4k = 0$. В этом случае описанный способ дает только одно решение $y_{(1)} = e^{\lambda t}$, где $\lambda = -\alpha/2$. Нетрудно, однако, непосредственно проверить, что в этом случае решением является также $y_{(2)} = te^{\lambda t}$. Беря линейную комбинацию этих двух решений, можно удовлетворить условиям (3.5). Практически λ_1 и λ_2 не бывают в точности равны, но такое решение описывает математическую абстракцию, соответствующую случаю близких λ_1 и λ_2.

Рассмотрим теперь вынужденные колебания под действием периодической вынуждающей силы. Они описываются уравнением (3.2), где $f = A\cos\omega t$ ($A, \omega = \mathrm{const}$). Сопоставим этому уравнению следующее уравнение с комплексной неизвестной функцией z:

$$z'' + \alpha z' + kz = Ae^{i\omega t}. \tag{3.12}$$

Подставляя в это уравнение $z = \widetilde{y}_1 + i\widetilde{y}_2$ и приравнивая отдельно действительные и мнимые части, получим, что $\widetilde{y}_1$ удовлетворяет уравнению (3.2), в котором $f = A\cos\omega t$, а $\widetilde{y}_2$ — уравнению (3.2), в котором $f = A\sin\omega t$. Таким образом, для получения требуемого решения уравнения (3.2) нужно найти решение уравнения (3.12) и взять его действительную часть.

Решение уравнения (3.12) естественно искать в виде

$$z = ae^{i\omega t}, \tag{3.13}$$

где a — неизвестная заранее постоянная. Подставляя (3.13) в (3.12) и сокращая на $e^{i\omega t}$, найдем $a = A/(-\omega^2 + i\alpha\omega + k)$ и, следовательно,

$$\widetilde{y}_1 = A\frac{k-\omega^2}{(k-\omega^2)^2+\alpha^2\omega^2}\cos\omega t + A\frac{\alpha\omega}{(k-\omega^2)^2+\alpha^2\omega^2}\sin\omega t. \tag{3.14}$$

(3.14) представляет собой частное решение уравнения (3.2), в котором $f = A\cos\omega t$, имеющее периодический характер с частотой, равной частоте ω вынуждающей силы. Это решение, однако, не удовлетворяет (3.5). Добавим к нему линейную комбинацию решения однородного уравнения (3.3) (для определенности $\alpha^2 - 4k < 0$):

$$y = \widetilde{y}_1 + C_1 y_1 + C_2 y_2. \tag{3.15}$$

Пользуясь (3.6), убеждаемся, что это выражение является решением того же неоднородного уравнения (3.2), а пользуясь произволом выбора C_1 и C_2, можно подобрать их так, чтобы удовлетворить (3.5). Действительно, C_1 и C_2 находятся из алгебраической системы уравнений, отличающейся от той, которая была при получении (3.10), только неоднородными членами. Решение, удовлетворяющее (3.5), имеет вид

$$y = \widetilde{y}_1 + \left[y_0^0 - \widetilde{y}_1(0)\right]e^{-\alpha t/2}\cos\frac{\beta}{2}t +$$
$$+ \frac{2}{\beta}\left[y_1^0 - \widetilde{y}_1'(0) + \frac{\alpha}{2}(y_0^0 - \widetilde{y}_1(0))\right]e^{-\alpha t/2}\sin\frac{\beta}{2}t, \tag{3.16}$$

а (3.15), таким образом, является общим решением неоднородного уравнения (3.2), где $f = A\cos\omega t$. Из (3.15) видно, что *общее решение неоднородного уравнения представляет собой сумму частного решения того же неоднородного уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения.*

С ростом t в формуле (3.16) все члены, кроме первого, затухают и остаются только вынужденные колебания $\widetilde{y}_1$.

Обратим внимание на важное явление — так называемое явление *резонанса.* Решение $\widetilde{y}_1$ теряет смысл, если в исходной системе нет трения ($\alpha = 0$) и частота ω вынуждающей силы равна частоте $\omega_0 = \sqrt{k}$, с которой колеблется маятник без воздействия вынуждающей силы (см. (3.11)), так как в знаменателе появляется нуль.

Чтобы найти частное решение в этом случае, т. е. частное решение уравнения

$$y'' + ky = A\cos\omega_0 t, \tag{3.17}$$

перейдем снова к комплексной форме

$$z'' + kz = Ae^{i\omega_0 t}. \tag{3.18}$$

Обратим внимание на то, что корни характеристического уравнения равны $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$. Попытаемся искать z в виде

$$z = ate^{i\omega_0 t}. \tag{3.19}$$

Подставляя (3.19) в (3.18), определим a и получим $z = A\frac{t}{2i\omega_0}e^{i\omega_0 t}$. $\operatorname{Re} z$ дает частное решение уравнения (3.17):

$$\widetilde{y}_1 = A\frac{t}{2\omega_0}\sin\omega_0 t. \tag{3.20}$$

Так как практически полное отсутствие трения и точное равенство не осуществляются, то решение такого типа практически не реализуется. Реализуется (3.14), но если частота ω близка к ω_0, а α мало́, то знаменатель в (3.14) мал и амплитуда решения велика. Таким образом, физически явление резонанса состоит в том, что при $\omega \sim \omega_0$ и малом α наблюдается заметное увеличение амплитуды вынужденных колебаний (3.14).

Математически же случаем резонанса будем называть такой случай, когда в (3.2) $f(t) = S(t)e^{\varkappa t}$, где $S(t)$ — многочлен, а $\varkappa$ совпадает с корнем характеристического уравнения. В рассмотренном выше уравнении (3.18) $\varkappa = i\omega_0$, т. е. совпадает с одним из корней характеристического уравнения.

Итак, на примере уравнения второго порядка выявлен ряд характерных свойств линейного уравнения с постоянными коэффициентами. Оказывается, эти закономерности имеют общий характер.

Сформулируем их для уравнения порядка n как естественное обобщение того, что наблюдалось для уравнения второго порядка. Доказательства будут даны ниже в § 5.

Рассмотрим сначала однородное уравнение

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = 0 \quad (a_i = \mathrm{const}). \tag{3.21}$$

Сопоставим (3.21) его характеристическое уравнение (ср. (3.4))

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \tag{3.22}$$

Это — алгебраическое уравнение порядка n, оно имеет корни $\lambda_k = p_k + iq_k$ $(k = 1, \dots, n)$.

1. Если все λ_k действительны и различны, то, беря линейную комбинацию

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k y_{(k)}, \quad \text{где} \quad y_{(k)} = e^{\lambda_k t}, \tag{3.23}$$

можно получить любое решение уравнения (3.21), определяя $C_1, \dots, C_n$ из начальных условий

$$y(t_0) = y_1^0, \quad y'(t_0) = y_2^0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_n^0 \tag{3.24}$$

(ср. (3.7), (3.5)), т. е. формула (3.23) является общим решением уравнения (3.21).

2. Если некоторые λ_k комплексные, то утверждение 1 остается в силе, но определяемые из (3.24) константы C_k будут комплексными и решение будет представлено в комплексной форме. Чтобы получить решение в действительной форме, в наборе решений вместо пары решений $y = e^{(p+iq)t}$ и $y^* = e^{(p-iq)t}$, отвечающих комплексно сопряженным корням $\lambda = p \pm iq$ (так как характеристическое уравнение имеет действительные коэффициенты, то вместе с $\lambda = p + iq$ корнем будет также $\lambda = p - iq$), можно взять пару действительных решений $\operatorname{Re} y = e^{pt}\cos qt$ и $\operatorname{Im} y = e^{pt}\sin qt$ (ср. (3.9)).

3. Если λ — кратный корень характеристического уравнения (3.22) кратности m, то ему отвечает m решений $e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}, \dots, t^{m-1}e^{\lambda t}$ (обобщение случая в), где $m = 2$).

Объединяя все случаи, можно сформулировать следующее правило.

Пусть характеристическое уравнение (3.22) *имеет r действительных корней λ_k кратности m_k, а прочие являются комплексно сопряженными вида $\lambda_l = p_l + iq_l$ и кратности m_l. Тогда общее решение уравнения* (3.21) *может быть записано в виде*

$$y = \sum_{k=1}^{r} R_k(t)e^{\lambda_k t} + \sum_{l=1}^{\frac{n-r}{2}} \bigl(P_l(t)e^{p_l t}\cos q_l t + Q_l(t)e^{p_l t}\sin q_l t\bigr), \tag{3.25}$$

где $R_k(t)$, $P_l(t)$, $Q_l(t)$ — многочлены степени $m_k - 1$, $m_l - 1$, $m_l - 1$ соответственно, коэффициенты которых произвольны. Эти коэффициенты однозначно определяются начальными условиями (3.24).

Точно так же можно, обобщая факты, полученные для уравнения второго порядка, сформулировать правило построения частного и общего решений неоднородного уравнения

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = S(t) e^{\varkappa t}, \tag{3.26}$$

где $S(t)$ — многочлен степени s, $\varkappa$ — постоянная, вообще говоря, комплексная.

Пусть в уравнении (3.26) $\varkappa$ *не совпадает ни с одним корнем* λ_k *характеристического уравнения* (3.22) (*так называемый нерезонансный случай*). *Тогда частное решение уравнения* (3.26) *можно записать в виде*

$$y = T(t) e^{\varkappa t}, \tag{3.27}$$

где $T(t)$ — *многочлен той же степени, что и* $S(t)$. *Коэффициенты многочлена* $T(t)$ *определяются из алгебраических уравнений, полученных подстановкой* (3.27) *в* (3.26) *и приравниванием членов с одинаковыми степенями* t (ср. (3.12), (3.13) — в этом простейшем случае $S(t)$ является константой A, т. е. многочленом нулевой степени, а многочлен $T(t)$ также является константой: $T = a$).

Если $\varkappa$ *совпадает с корнем характеристического уравнения* λ, *имеющим кратность* m (*так называемый резонансный случай*), *то частное решение* (3.26) *следует искать в виде*

$$y = T(t) t^m e^{\varkappa t}, \tag{3.28}$$

где $T(t)$ — *многочлен той же степени, что и* $S(t)$. *Коэффициенты* $T(t)$ *по-прежнему определяются подстановкой* (3.28) *в уравнение* (3.26) (ср. (3.19), где появляется множитель t в соответствии с кратностью $m = 1$ корня $i\omega_0$).

Если $\varkappa = \alpha + i\beta$ *комплексно, то действительная* (*соответственно: мнимая*) *часть решения* (3.28) *является решением уравнения с правой частью* $S(t)e^{\alpha t}\cos\beta t$ (*соответственно* $S(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$).

Общее решение неоднородного уравнения (3.26) *представляется в виде суммы общего решения* (3.25) *однородного уравнения* (3.21) *и частного решения* (3.27) *или* (3.28) *неоднородного уравнения* (3.26) (ср. (3.15)).

Все эти утверждения в дальнейшем будут строго доказаны (см. теоремы 3.11, 3.12, 3.14, 3.15).

§ 2. Общие свойства линейного уравнения n-го порядка

Обратимся к уравнению (3.1). Если в рассматриваемой области изменения независимого нереременного $a_0(x) \neq 0$, то, поделив на $a_0(x)$ и обозначая полученные коэффициенты и правую часть вновь через $a_1(x), \ldots, a_n(x)$, $f(x)$, будем иметь

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x). \tag{3.29}$$

Определение. *Уравнение (3.29) называется однородным, если $f(x) \equiv 0$, в противном случае — неоднородным.*

Пусть $a_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ непрерывны на некотором интервале X (X может быть как конечным интервалом, так и бесконечным, например, $(-\infty, \infty)$). Общая теорема существования и единственности (см. теоремы 2.8 и 2.9 § 4 гл. 2) гарантирует, что на некотором сегменте $|x - x_0| \leqslant H$, принадлежащем X, существует единственное решение $y(x)$ уравнения (3.29), удовлетворяющее начальному условию

$$y(x_0) = y_1^0, \quad y'(x_0) = y_2^0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_n^0. \tag{3.30}$$

Для уравнения (3.29) можно доказать более сильное утверждение.

Теорема 3.1. *Если $a_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$, $f(x)$ непрерывны на X, то решение начальной задачи* (3.29), (3.30) *существует и единственно всюду на X.*

Так как начальная задача для уравнения n-го порядка является частным случаем начальной задачи для системы n уравнений первого порядка (см. § 4 гл. 2), то теорему 3.1 можно получить как частный случай аналогичного утверждения для системы линейных уравнений, которая имеет вид

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x)y_k + f_i(x), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.31}$$

а соответствующие начальные условия —

$$y_i(x_0) = y_i^0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.32}$$

Теорема 3.2. *Если $a_{ik}(x)$, $f_i(x)$ $(i, k = 1, \ldots, n)$ непрерывны на X, то решение задачи* (3.31), (3.32) *существует и единственно на X.*

Достаточно доказать, что решение существует и единственно на любом отрезке $[x_0, x_0 + \Delta] \subset X$. Теорема существования и единственности гарантирует решение на некотором отрезке $[x_0, x_0 + H]$, как уже указывалось выше. Точку $(x_0 + H,\, y_i(x_0 + H))$ можно принять за новую начальную точку (см. замечание 2 к теоремам § 2 гл. 2) и получить решение на большем отрезке $[x_0, x_0 + H_1]$, $H_1 > H$, и т. д. Пусть $[x_0, x_0 + \bar{H})$, где $\bar{H} \leqslant \Delta$ — максимальный полуинтервал, на котором существует единственное решение задачи (3.31), (3.32). Возьмем произвольную последовательность $H_n \to \bar{H}$. Убедимся, что существует $\lim_{n\to\infty} y_i(x_0 + H_n)$. Пусть

$$N = \max_{i,k} \sup_{[x_0, x_0+\Delta]} |a_{ik}(x)|, \quad \gamma = \max_{i} \sup_{[x_0, x_0+\Delta]} |f(x)|.$$

Тогда на любом отрезке $[x_0, x_0 + H_n]$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{dy_i}{dx}\right| \leqslant N \sum_{j=1}^{n} |y_j(x)| + \gamma.$$

Введя $\rho(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2(x)}$ и повторяя в точности рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 2.3 § 4 гл. 2, получим

$$\rho(x) \leqslant \rho(x_0) e^{Nn^2 \bar{H}} + \frac{\gamma}{Nn}\left(e^{Nn^2 \bar{H}} - 1\right) = B,$$

и, следовательно, для любого $x \in [x_0, x_0 + H]$ справедливо

$$|y_i(x)| \leqslant \rho(x_0) e^{Nn^2 \bar{H}} + \frac{\gamma}{Nn}\left(e^{Nn^2 \bar{H}} - 1\right),$$

а тогда справедливо также неравенство

$$\left|\frac{dy_i}{dx}\right| \leqslant nNB + \gamma = C.$$

Пользуясь этим и учитывая, что $H_n \to \bar{H}$, получим

$$|y_i(x_0 + H_{n+m}) - y_i(x_0 + H_n)| \leqslant C|H_{n+m} - H_n| < \varepsilon$$

при $n > N(\varepsilon)$ и любом m. Отсюда по критерию Коши делаем вывод о сходимости последовательности $y_i(x_0 + H_n)$ к некоторому пределу $\bar{y}_i$. Будем считать этот предел значением y_i в точке $x_0 + \bar{H}$, т. е. положим $y_i(x_0 + \bar{H}) = \bar{y}_i$. Таким образом, интегральная кривая оказывается непрерывно продолженной вплоть до точки $x_0 + \bar{H}$. В силу самой системы уравнений (3.31) тем же свойством обладают производные $\dfrac{dy_i}{dx}$. Тогда в случае $\bar{H} = \Delta$ теорема доказана.

Рассмотрим случай $\bar{H} < \Delta$. Нетрудно убедиться, что этот случай не реализуется. Действительно, приняв $x_0 + \bar{H}$, $y_i(x_0 + \bar{H})$ за новую начальную точку, можно продолжить решение на участок $[x_0, x_0 + \bar{H} + \delta]$, $\delta > 0$, что противоречит определению $\bar{H}$.

Итак, $\bar{H} = \Delta$, т. е. решение существует и единственно на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta]$, что и требовалось.

Дальнейшее рассмотрение системы (3.31) отложим до § 6 и вернемся снова к (3.29). Для уравнения (3.29) справедлива следующая теорема, называемая *принципом суперпозиции*.

Теорема 3.3. *Пусть в уравнении* (3.29) *правая часть* $f(x)$ *является линейной комбинацией функций* $f_i(x)$, *т. е.* $f(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(x)$, *где* α_i — *постоянные числа, и пусть* $y_i(x)$ *являются решениями уравнений*

$$y_i^{(n)} + a_1(x)y_i^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y_i = f_i(x). \tag{3.33}$$

Тогда линейная комбинация $y_i(x)$ *с теми же коэффициентами* α_i, *т. е. функция* $y(x)=\sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_i(x)$, *является решением уравнения* (3.29).

Значение этого принципа в том, что правую часть уравнения (3.29) можно представить как линейную комбинацию более простых элементов и свести решение уравнения к решению нескольких более простых уравнений (3.33). С точки зрения физики это означает, что результат сложного внешнего воздействия на некоторый объект, выражаемого функцией $f(x)$, можно представить как суперпозицию результатов отдельных элементарных воздействий.

Доказательство теоремы 3.3 основано на тождестве, справедливом для k произвольных n раз дифференцируемых функций $u_1, \dots, u_k$ и следующем непосредственно из свойств дифференцирования

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i(x)\right)^{(n)} + a_1(x)\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i(x)\right)^{(n-1)} + \dots + a_n(x)\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i(x) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left[u_i^{(n)}(x) + a_1(x)u_i^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)u_i(x)\right]. \tag{3.34}$$

Полагая $u_i(x) = y_i(x)$, где $y_i(x)$ — решения уравнений (3.33), получим для $y(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_i(x)$

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(x) = f(x),$$

что и требовалось.

Замечание. Левую часть уравнения (3.29) можно рассматривать как оператор Ly, определенный на множестве n раз дифференцируемых функций y. Тогда (3.34) означает, что этот оператор — линейный.

Отметим важные частные случаи теоремы 3.3, формулируя их как отдельные утверждения.

Теорема 3.4. *Линейная комбинация решений однородного уравнения есть решение однородного уравнения.*

(Это частный случай принципа суперпозиции, когда $f_i = f \equiv 0$.)

Замечание. На языке линейной алгебры это можно выразить следующим образом: множество решений однородного уравнения является линейным пространством.

Пусть теперь $k = 2$, $f_1 = f_2$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$ и, следовательно, $f = 0$. Таким образом, имеет место

Теорема 3.5. *Разность двух решений неоднородного линейного уравнения удовлетворяет однородному уравнению.*

В теореме 3.3 α_i могут быть и комплексными.

Теорема 3.6. *Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$ удовлетворяют уравнениям* (3.33) $(i = 1, 2)$. *Тогда $z(x) = y_1(x) + iy_2(x)$ удовлетворяет уравнению*

$$z^{(n)} + a_1(x)z^{(n-1)} + \dots + a_n(x)z = f_1 + if_2. \tag{3.35}$$

Обратно: пусть $z(x) = y_1(x) + iy_2(x)$ удовлетворяет уравнению (3.35). *Тогда $y_1(x)$, $y_2(x)$ удовлетворяют уравнениям* (3.33).

Прямая теорема является частным случаем теоремы 3.3 ($\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = i$). Для получения обратного утверждения надо к левой части (3.35) применить тождество (3.34), полагая $u_1 = y_1$, $u_2 = y_2$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = i$, после чего приравнять действительную часть полученного выражения величине f_1, а мнимую часть — величине f_2 согласно правилу сравнения комплексных чисел.

Все перечисленные свойства характерны именно для линейных уравнений и существенно облегчают их исследование и решение.

§ 3. Однородное линейное уравнение n-го порядка

Обратимся к изучению уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0, \tag{3.36}$$

коэффициенты которого $a_i(x)$ $(i = 1, \dots, n)$ непрерывны на интервале X. Как было показано в предыдущем параграфе, решение начальной задачи существует и единственно на X, чем будем существенно пользоваться ниже.

Определение. Будем говорить, что *функции* $u_1(x), \ldots, u_p(x)$ *линейно зависимы на интервале* X, если существуют постоянные $C_1, \ldots, C_p$, не все равные нулю, такие, что имеет место тождество

$$\sum_{i=1}^{p} C_i u_i(x) \equiv 0, \quad x \in X. \tag{3.37}$$

В противном случае (т. е. если (3.37) выполняется только при $C_1 = \cdots = C_p = 0$) будем говорить, что $u_1(x), \ldots, u_p(x)$ *линейно независимы.*

Пусть $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — решения уравнения (3.36).

Определение. Назовем детерминант

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{3.38}$$

*определителем Вронского**).

Теорема 3.7. *Если решения* $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ *уравнения* (3.36) *линейно зависимы на* X, *то* $\Delta(x) \equiv 0$ *на* X.

В самом деле, согласно (3.37) имеем $\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) = 0$. Продифференцировав это тождество $n-1$ раз, получим

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(n-1)}(x) = 0. \tag{3.39}$$

При любом $x \in X$ эти соотношения можно рассматривать как систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно $C_1, \ldots, C_n$, имеющую нетривиальное решение по условию линейной зависимости функций y_i. Следовательно, определитель системы $\Delta(x) = 0$ при любом $x \in X$, т. е. $\Delta(x) \equiv 0$ на X.

Замечание. Из доказательства теоремы видно, что она справедлива не только для решений уравнения (3.36), но для любых $n-1$ раз дифференцируемых функций.

Теорема 3.8. *Если* $\Delta(x) = 0$ *хотя бы для одного* $x \in X$, *то решения* $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ *уравнения* (3.36) *линейно зависимы на* X.

---

*)Иногда бывает удобно обозначение $\Delta(y_1(x), \ldots, y_n(x))$.

Доказательство. Действительно, возьмем точку $x = x_0$, в которой $\Delta(x_0) = 0$, и составим систему линейных алгебраических уравнений относительно $C_1, \ldots, C_n$ с определителем $\Delta(x_0)$:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x_0) = 0, \ldots, \sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(n-1)}(x_0) = 0. \tag{3.40}$$

Так как $\Delta(x_0) = 0$, то эта система имеет нетривиальное решение $C_1, \ldots, C_n$. Рассмотрим линейную комбинацию $y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$. Согласно теореме 3.4 $y(x)$ является решением уравнения (3.36), а (3.40) означает, что это решение удовлетворяет в точке x_0 нулевым начальным условиям $y(x_0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$. Так как тривиальное решение уравнения (3.36) $\widetilde{y}(x) \equiv 0$ удовлетворяет, очевидно, тем же начальным условиям, то в силу теоремы единственности $y(x) \equiv \widetilde{y}(x) \equiv 0$, т. е. $\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) \equiv 0$, где по построению не все C_i равны нулю, а это и означает линейную зависимость $y_1(x), \ldots, y_n(x)$.

Из доказанных теорем непосредственно вытекает следующая альтернатива.

Теорема 3.9. *Определитель Вронского $\Delta(x)$ либо тождественно равен нулю, и это означает, что решения $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ линейно зависимы, либо не обращается в нуль ни в одной точке X, и это означает, что $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ линейно независимы.*

Ситуацию можно выразить следующей схемой:

$$\Delta(x)\begin{cases} \xrightarrow{\text{либо}} \Delta(x) \equiv 0 \leftrightarrows y_1(x), \ldots, y_n(x) \text{ линейно зависимы} \\ \xrightarrow[\text{либо}]{} \Delta(x) \neq 0 \leftrightarrows y_1(x), \ldots, y_n(x) \text{ линейно независимы} \end{cases}$$

при любом $x \in X$.

Определение. ***Фундаментальной системой решений уравнения*** (3.36) будем называть любые n линейно независимых решений уравнения (3.36).

Теорема 3.10. *Линейное однородное уравнение имеет фундаментальную систему решений.*

Доказательство. Действительно, возьмем произвольный отличный от нуля определитель Δ^0 с элементами a_{ij}. Определим решения $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ уравнения (3.36) следующими начальными условиями:

$$y_i(x_0) = a_{1i}, \ldots, y_i^{(n-1)}(x_0) = a_{ni}. \tag{3.41}$$

Составим определитель Вронского $\Delta(x)$. В силу (3.41) $\Delta(x_0) = \Delta^0 \neq \neq 0$. А тогда в силу теоремы 3.9 $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ линейно независимы.

Замечание. Так как существует бесконечно много определителей, отличных от нуля, для каждого уравнения существует бесконечно много фундаментальных систем решений. Кроме того, линейное невырожденное преобразование $\bar{y}_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j$ переводит одну фундаментальную систему решений в другую.

Докажем теперь основную теорему данного параграфа.

Теорема 3.11. *Если $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — фундаментальная система решений, то любое решение $y(x)$ уравнения* (3.36) *представимо в виде*

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_i y_i(x), \tag{3.42}$$

где $C_1, \ldots, C_n$ — некоторые постоянные.

Доказательство. Пусть $y(x_0) = y_1^0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_n^0$. Определим постоянные $C_1, \ldots, C_n$ линейной системой уравнений с детерминантом, равным $\Delta(x_0) \neq 0$:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x_0) = y_1^0, \quad \ldots, \quad \sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(n-1)}(x_0) = y_n^0 \tag{3.43}$$

и построим $\widetilde{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$. Согласно теореме 3.4 $\widetilde{y}(x)$ является решением уравнения (3.36), а (3.43) означает, что это решение удовлетворяет тем же начальным условиям, что и $y(x)$. Тогда в силу единственности (ср. доказательство теоремы 3.8) $y(x) \equiv \widetilde{y}(x) = = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$, что и требовалось.

Замечания.

1. Формула (3.42), где $C_1, \ldots, C_n$ — *произвольные постоянные*, *является общим решением* уравнения (3.36) в том же смысле, как в § 1, т. е. (3.42) является формулой, содержащей все решения уравнения (3.36) и не содержащей ничего, кроме решений. В самом деле, по теореме 3.4 при любых $C_1, \ldots, C_n$ (3.42) является решением уравнения (3.36), а согласно только что доказанной теореме в (3.42) содержится любое решение уравнения (3.36).

2. На языке линейной алгебры теоремы 3.10 и 3.11 означают, что в пространстве решений линейного однородного уравнения (3.36) имеется базис из n элементов, т. е. это пространство n-мерно.

§ 4. Неоднородное линейное уравнение n-го порядка

Рассмотрим теперь уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x), \tag{3.44}$$

где $a_i(x)$ $(i = 1, \dots, n)$ непрерывны на интервале X.

Теорема 3.12. *Если* $y_1(x), \dots, y_n(x)$ — *фундаментальная система решений однородного уравнения* (3.36), *а* $\bar{y}(x)$ — *частное решение неоднородного уравнения* (3.44), *то любое решение* $y(x)$ *неоднородного уравнения* (3.44) *представимо в виде*

$$y(x) = \bar{y}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x), \tag{3.45}$$

где $C_1, \dots, C_n$ — *некоторые постоянные.*

Замечания.

1. Теорема справедлива при любом выборе частного решения $\bar{y}(x)$.

2. Теорему 3.12 можно сформулировать и так: *общее решение неоднородного уравнения есть сумма частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения.*

Доказательство. Рассмотрим разность $y(x) - \bar{y}(x)$. Согласно теореме 3.5 эта разность удовлетворяет однородному уравнению (3.36), и, значит, по теореме 3.11

$$y(x) - \bar{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x).$$

Отсюда и последует (3.45).

Таким образом, для построения общего решения неоднородного уравнения нужно помимо фундаментальной системы решений однородного уравнения знать хотя бы одно частное решение неоднородного уравнения. Покажем сейчас, что, зная фундаментальную систему решений, можно найти квадратурой некоторое частное решение $\bar{y}(x)$ неоднородного уравнения.

Зададимся целью построить частное решение $\bar{y}(x)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = 0, \ \dots, \ y^{(n-1)}(x_0) = 0. \tag{3.46}$$

С этой целью воспользуемся следующим эвристическим рассуждением. Представим $f(x)$ приближенно как сумму функций (элементарных воздействий), равных $f(\xi)$ в промежутке $(\xi - \Delta\xi, \xi)$ и нулю в остальных точках. Решение y, отвечающее каждому такому элементарному воздействию и имеющее при $x = x_0$ равные нулю производные до $(n-1)$-го порядка включительно, является тождественным нулем вплоть до $\xi - \Delta\xi$, но

$$y^{(n-1)}(\xi) \simeq y^{(n)}(\xi - \Delta\xi)\Delta\xi =$$
$$= \left[y^{(n)}(\xi - \Delta\xi)\Delta\xi + a_1 y^{(n-1)}(\xi - \Delta\xi)\Delta\xi + \dots + a_n y(\xi - \Delta\xi)\Delta\xi\right] =$$
$$= f(\xi - \Delta\xi)\Delta\xi,$$

т. е. $y^{(n-1)}(\xi)$ равно уже не нулю, а $f(\xi)\Delta\xi$ и, таким образом, далее решение также будет не нулем. В силу принципа суперпозиции достаточно построить решение однородного уравнения (ведь вне $(\xi-\Delta\xi, \xi)$ правая часть равна нулю), принимающее в точке ξ нулевое значение вместе с производными до $(n-2)$-го порядка включительно и с производной $(n-1)$-го порядка, равной единице (обозначим это решение $\mathcal{K}(x, \xi)$, указывая зависимость от начальной точки, и назовем его *импульсной функцией*), а затем умножить его на $f(\xi)\Delta\xi$. Итак, $\mathcal{K}(x, \xi)$ строится как решение однородного уравнения, удовлетворяющее условиям

$$\mathcal{K}(\xi, \xi) = 0, \ \dots, \ \mathcal{K}_x^{(n-2)}(\xi, \xi) = 0, \ \ \mathcal{K}_x^{(n-1)}(\xi, \xi) = 1, \tag{3.47}$$

а решение, отвечающее элементарному воздействию, имеет вид $\mathcal{K}(x, \xi) f(\xi)\Delta\xi$. Суммируя теперь элементарные воздействия на основании того же принципа суперпозиции и переходя от суммы к интегралу, получим решение $\bar{y}(x)$, удовлетворяющее условию (3.46):

$$\bar{y}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \mathcal{K}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi. \tag{3.48}$$

Формула (3.48) получена на основании эвристических соображений, но нетрудно непосредственной проверкой убедиться, что (3.48) есть частное решение уравнения (3.44). В этой проверке и будет состоять доказательство следующей теоремы.

Теорема 3.13. *Выражение* (3.48), *где функция* $\mathcal{K}(x, \xi)$, *называемая импульсной функцией, удовлетворяет однородному уравнению* (3.36) *и начальным условиям* (3.47), *является частным решением неоднородного уравнения* (3.44), *удовлетворяющим нулевым начальным условиям* (3.46).

Доказательство. Найдем из (3.48) $\bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n)}$. Предварительно заметим, что так как ξ является параметром, принадлежащим тому же множеству, что и x, то (3.47) равносильно записи

$$\mathcal{K}(x, x) = 0, \ \dots, \ \mathcal{K}_x^{(n-2)}(x, x) = 0, \ \ \mathcal{K}_x^{(n-1)}(x, x) = 1. \tag{3.47}$$

Дифференцируя (3.48), имеем

$$\bar{y}'(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \mathcal{K}'_x(x,\xi) f(\xi)\, d\xi + \mathcal{K}(x,x) f(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \mathcal{K}'_x(x,\xi) f(\xi)\, d\xi,$$

. . . .

$$\bar{y}^{(n-1)}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \mathcal{K}_x^{(n-1)}(x,\xi) f(\xi)\, d\xi,$$

$$\bar{y}^{(n)}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \mathcal{K}_x^{(n)}(x,\xi) f(\xi)\, d\xi + \mathcal{K}_x^{(n-1)}(x,x) f(x) = \\ = \int\limits_{x_0}^{x} \mathcal{K}_x^{(n)}(x,\xi) f(\xi)\, d\xi + f(x).$$

Возможность дифференцирования под знаком интеграла следует из теоремы о непрерывной зависимости решения системы дифференциальных уравнений от x и начального значения переменной x, т. е. в данном случае от ξ (см. § 5 гл. 2). Подставляя $\bar{y}, \bar{y}', \ldots, \bar{y}^{(n)}$ в (3.44), получим

$$\bar{y}^{(n)} + a_1(x)\bar{y}^{(n-1)} + \cdots + a_n\bar{y} = \\ = \int\limits_{x_0}^{x} \left[\mathcal{K}_x^{(n)}(x,\xi) + a_1(x)\mathcal{K}_x^{(n-1)}(x,\xi) + \ldots \right. \\ \left. \cdots + a_n(x)\mathcal{K}(x,\xi)\right] f(\xi)\, d\xi + f(x) = f(x),$$

так как $[\cdot]$ под интегралом обращается в нуль в силу определения $\mathcal{K}(x,\xi)$. Таким образом, $\bar{y}(x)$ действительно является решением уравнения (3.44) и, кроме того, очевидно, удовлетворяет (3.46).

Замечание. В частности, для уравнения первого порядка формула (3.48) совпадает с формулой (2.29) при $y_0 = 0$. В (2.29) импульсной функцией является множитель $e^{-\int\limits_{\xi}^{x} p(\xi)\, d\xi}$, который, согласно (2.26), удовлетворяет однородному уравнению и обращается в единицу при $x = \xi$.

Пример 3.1. Приведем пример построения импульсной функции. Рассмотрим уравнение, представляющее собой неоднородное уравнение типа уравнения Эйлера

$$x^2 y'' + \frac{1}{2} y = f(x), \quad x > 0.$$

Фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения имеет вид $y_1 = \sqrt{x}\cos\frac{\ln x}{2}$, $y_2 = \sqrt{x}\sin\frac{\ln x}{2}$. (Можно непосредственной проверкой убедиться, что y_1 и y_2 удовлетворяют уравнению; нетрудно подсчитать также определитель Вронского $= \Delta(x)$ и убедиться, что он равен $1/2$.)

Функцию $\mathcal{K}(x,\xi)$ будем искать в виде $\mathcal{K}(x,\xi) = C_1y_1 + C_2y_2$. Условия $\mathcal{K}(\xi,\xi) = 0$, $\mathcal{K}'_x(\xi,\xi) = 1$ приводят к системе уравнений относительно C_1 и C_2:

$$C_1\sqrt{\xi}\cos\frac{\ln\xi}{2} + C_2\sqrt{\xi}\sin\frac{\ln\xi}{2} = 0,$$
$$C_1\frac{1}{2\sqrt{\xi}}\left(\cos\frac{\ln\xi}{2} - \sin\frac{\ln\xi}{2}\right) + C_2\frac{1}{2\sqrt{\xi}}\left(\sin\frac{\ln\xi}{2} + \cos\frac{\ln\xi}{2}\right) = 1.$$

Определив C_1 и C_2, приходим после несложных преобразований к следующему выражению для $\mathcal{K}(x,\xi)$:

$$\mathcal{K}(x,\xi) = 2\sqrt{x\xi}\cdot\sin(\ln\sqrt{x/\xi}).$$

§ 5. Линейное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

Знание фундаментальной системы решений обеспечивает возможность найти любое решение однородного уравнения, а с применением квадратуры — также и решение неоднородного уравнения. Существование фундаментальной системы решений было доказано (см. теорему 3.10), однако вопрос о ее эффективном построении остался открытым.

Пусть в (3.36) $a_i = \text{const}$:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = 0. \tag{3.49}$$

Этот класс уравнений замечателен тем, что для него нахождение фундаментальной системы решений сводится к алгебраическим операциям, а именно, к решению алгебраического уравнения n-й степени.

Сопоставим уравнению (3.49) многочлен относительно λ, называе-мый *характеристическим многочленом* уравнения (3.49):

$$M(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n.$$

Лемма 3.1. *Справедливо тождество*

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{\lambda x}f(x)\right] + a_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[e^{\lambda x}f(x)\right] + \dots + a_ne^{\lambda x}f(x) =$$
$$= e^{\lambda x}\left\{M(\lambda)f(x) + M'(\lambda)f'(x) + \frac{M''(\lambda)f''(x)}{2!} + \dots + \frac{M^{(n)}(\lambda)f^{(n)}(x)}{n!}\right\}. \tag{3.50}$$

Доказательство. Это тождество доказывается непосредственным вычислением с использованием формулы Лейбница для дифференцирования произведения. Имеем

$$
\begin{aligned}
&e^{\lambda x} f = e^{\lambda x} f,\\
&\frac{d}{dx}(e^{\lambda x}\cdot f) = e^{\lambda x}(\lambda f + f') = e^{\lambda x}(\lambda f + \lambda' f'),\\
&\frac{d^2}{dx^2}(e^{\lambda x}\cdot f) = e^{\lambda x}\left(\lambda^2 f + 2\lambda f' + f''\right) = e^{\lambda x}\left(\lambda^2 f + \frac{(\lambda^2)' f'}{1!} + \frac{(\lambda^2)'' f''}{2!}\right),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{d^n}{dx^n}(e^{\lambda x}\cdot f) = e^{\lambda x}\left(\lambda^n f + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{k!}\lambda^{n-k} f^{(k)} + \ldots + f^{(n)}\right) =\\
&\qquad = e^{\lambda x}\left(\lambda^n f + (\lambda^n)' f' + \cdots + \frac{(\lambda^n)^{(k)} f^{(k)}}{k!} + \cdots + \frac{(\lambda^n)^{(n)} f^{(n)}}{n!}\right).
\end{aligned}
$$

Складывая полученные равенства, умножив их предварительно на соответствующее a_i, приходим к (3.50).

Замечания.

1. Если $f(x) = x^p$, то (3.50) принимает вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^n}{dx^n}(e^{\lambda x} x^p) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{\lambda x} x^p) + \cdots + a_n e^{\lambda x} x^p =\\
&= e^{\lambda x}\Big\{ M(\lambda) x^p + p M'(\lambda) x^{p-1} + \ldots\\
&\qquad \cdots + \frac{p\cdots(p-k+1)}{k!} M^{(k)}(\lambda) x^{p-k} + \cdots + M^{(p)}(\lambda)\Big\}.
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

В частности, при $p = 0$ имеем

$$
\frac{d^k}{dx^k} e^{\lambda x} + a_1 \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} e^{\lambda x} + \cdots + a_n e^{\lambda x} = e^{\lambda x} M(\lambda). \tag{3.52}
$$

2. Тождества (3.50)–(3.52) можно записать компактнее, если обозначить через D оператор дифференцирования: $\dfrac{dy}{dx} = Dy$. Если воспользоваться правилами сложения и умножения операторов [15; гл. 5, § 1], то левую часть уравнения (3.49) можно записать в виде

$$
(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n) y = M(D) y.
$$

Оператор $M(D)$ называется *операторным многочленом.* Он имеет ту же структуру, что и характеристический многочлен $M(\lambda)$.

Введя $M(D)$, можно тождества (3.50)–(3.52) записать в виде

$$M(D)e^{\lambda x}f(x)=e^{\lambda x}\left\{M(\lambda)f(x)+M'(\lambda)f'(x)+\dots+\frac{M^{(n)}(\lambda)f^{(n)}(x)}{n!}\right\}, \tag{3.53}$$

$$M(D)e^{\lambda x}x^p=e^{\lambda x}\left\{M(\lambda)x^p+\dots+\frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}M^{(k)}x^{p-k}+\dots \right.$$
$$\left. \dots+M^{(p)}(\lambda),\right\} \tag{3.54}$$

$$M(D)e^{\lambda x}=e^{\lambda x}M(\lambda). \tag{3.55}$$

Отметим также следующее свойство операторных многочленов, которое понадобится в дальнейшем. Рассмотрим наряду с $M(D)$ некоторый другой операторный многочлен $N(D)$. Пользуясь правилом сложения и умножения операторов, нетрудно убедиться, что операторные многочлены перемножаются по правилу обычных многочленов:

$$M(D)N(D) = N(D)M(D) = D^{n+s} + (a_1 + b_1)D^{n+s-1} + \dots + a_n b_n.$$

Приравнивая $M(\lambda)$ нулю, получим алгебраическое уравнение n-й степени относительно λ — так называемое *характеристическое уравнение*

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \tag{3.56}$$

Предположим, что это уравнение имеет корни $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ кратностей $m_1, \dots, m_l$ $(m_1 + \dots + m_l = n)$.

Теорема 3.14. 1. *Корню λ_k характеристического уравнения* (3.56) *кратности m_k отвечают m_k частных решений вида*

$$e^{\lambda_k x},\ xe^{\lambda_k x},\ \dots,\ x^{m_k-1}e^{\lambda_k x}. \tag{3.57}$$

2. *Решения* (3.57), $k = 1, \dots, l$, *образуют фундаментальную систему решений уравнения* (3.49).

Доказательство. 1. Воспользуемся (3.51) или (3.54). Если λ_k является корнем характеристического уравнения кратности m_k, то (см. [16; гл. 7, § 3])

$$M(\lambda_k) = M'(\lambda_k) = \dots = M^{(m_k-1)}(\lambda_k) = 0.$$

Поэтому правая часть (3.51) обращается в нуль для $p = 0, 1, \dots$ $\dots, m_k - 1$, а это означает, что $x^p e^{\lambda_k x}$ $(p = 0, 1, \dots, m_k - 1)$ удовлетворяет уравнению (3.49), что и требуется.

2. Предположим противное, т. е. что решения (3.57) ($k = 1, \dots, l$) линейно зависимы. Это означает, что справедливо тождество

$$R_1(x)e^{\lambda_1 x} + \dots + R_l(x)e^{\lambda_l x} = 0, \tag{3.58}$$

где через $R_j(x)$ обозначены многочлены степени $m_j - 1$, не все равные нулю. Допустим, что отличным от нуля является R_1 (этого можно добиться соответствующей нумерацией λ), а в R_1 старший отличный от нуля член имеет степень p_1 ($p_1 \leqslant m_1 - 1$), т. е.

$$R_1(x) = C_{10} + C_{11}x + \dots + C_{1p_1}x^{p_1},$$

причем $C_{1p_1} \neq 0$.

Умножим (3.58) на $e^{-\lambda_l x}$. Получим

$$R_1(x)e^{(\lambda_1 - \lambda_l)x} + \dots + R_{l-1}(x)e^{(\lambda_{l-1} - \lambda_l)x} + R_l(x) = 0. \tag{3.59}$$

Продифференцируем это тождество на единицу большее число раз, нежели степень $p_l \leqslant m_l - 1$ многочлена $R_l(x)$. Предварительно заметим, что для выражения $A(x)e^{\alpha x}$, где $\alpha = \text{const}$, $A(x)$ — многочлен, при произвольном k имеет место тождество

$$\frac{d^k}{dx^k}A(x)e^{\alpha x} = B(x)e^{\alpha x},$$

где $B(x)$ — многочлен той же степени, что и $A(x)$, причем его старший коэффициент равен старшему коэффициенту $A(x)$, помноженному на α^k. Это тождество легко получить либо из (3.53), полагая $M(D) = D^k$, $\lambda = \alpha$, $f(x) = A(x)$, либо просто из формулы Лейбница. Итак, дифференцируя (3.59), получим

$$Q_1(x)e^{(\lambda_1 - \lambda_l)x} + \dots + Q_{l-1}(x)e^{(\lambda_{l-1} - \lambda_l)x} = 0,$$

или

$$Q_1(x)e^{\lambda_1 x} + \dots + Q_{l-1}(x)e^{\lambda_{l-1} x} = 0, \tag{3.60}$$

где $Q_1(x), \dots, Q_{l-1}(x)$ — многочлены той же степени, что и многочлены $R_1(x), \dots, R_{l-1}(x)$, причем коэффициент старшего члена $Q_1(x)$ есть $C_{1p_1}(\lambda_1 - \lambda_l)^{p_l+1}$.

Проделывая с (3.60) ту же операцию, что и с (3.58), и продолжая этот процесс, приходим к тождеству вида

$$S_1(x)e^{\lambda_1 x} = 0 \quad \text{или} \quad S_1(x) = 0, \tag{3.61}$$

причем коэффициент старшего члена $S_1(x)$ есть $C_{1p_1}(\lambda_1 - \lambda_l)^{p_l+1} \cdots$ $\cdots (\lambda_1 - \lambda_2)^{p_2+1}$ и в силу (3.61) он должен равняться нулю, а это противоречит тому, что $C_{1p_1} \neq 0$, $\lambda_1 - \lambda_l \neq 0, \ldots, \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$. Противоречие приводит к выводу, что решения (3.57) линейно независимы, т. е. образуют фундаментальную систему решений, и утверждение 2, таким образом, доказано.

В силу теоремы 3.14 общее решение уравнения (3.49) является линейной комбинацией решений (3.57) ($k = 1, \ldots, l$). Однако в случае комплексных λ_k такое представление не всегда удобно. Можно, однако, вместо фундаментальной системы решений (3.57) пользоваться другой фундаментальной системой решений, состоящей из действительных функций.

Пусть $\lambda_k = p_k + iq_k$. Тогда двум комплексным решениям вида $x^r e^{\lambda_k x}$, $x^r e^{\lambda_k^* x}$ (через λ_k^* обозначен корень характеристического уравнения, комплексно сопряженный λ_k; такой корень существует в силу действительности коэффициентов характеристического уравнения) соответствуют, в силу теоремы 3.6, два действительных решения:

$$\operatorname{Re}(x^r e^{\lambda_k x}) = x^r e^{p_k x} \cos q_k x, \quad \operatorname{Im}(x^r e^{\lambda_k x}) = x^r e^{p_k x} \sin q_k x.$$

Таким образом, вместо комплексных решений можно построить столько же действительных решений; они образуют другую фундаментальную систему решений, будучи линейно независимыми в силу того, что матрица перехода от пары комплексно сопряженных решений к их действительной и мнимой частям имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ и имеет отличный от нуля определитель, равный $-2i$.

Беря линейную комбинацию полученных действительных решений, приходим к представлению (3.25), которое теперь, таким образом, доказано.

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x). \tag{3.62}$$

Зная фундаментальную систему решений (3.57), можно построить его частное решение по теореме 3.13. Практически это, однако, требует довольно громоздких выкладок, в связи с чем представляет интерес класс $f(x)$, для которого можно построить частное решение, не обращаясь к формуле (3.48), а пользуясь чисто алгебраическими операциями.

Теорема 3.15. *Пусть $f(x) = S(x)e^{\lambda x}$, где $\lambda = \mathrm{const}$, $S(x)$ — многочлен степени s. Пусть λ не совпадает ни с одним корнем λ_k характеристического уравнения* (3.56) (*так называемый нерезонансный случай*). *Тогда существует частное решение уравнения* (3.62), *имеющее вид*

$$\bar{y}(x) = P(x)e^{\lambda x}, \tag{3.63}$$

где $P(x)$ — многочлен той же степени, что и $S(x)$. Если λ совпадает с корнем характеристического уравнения λ_k кратности m_k (так называемый резонансный случай), то существует частное решение уравнения (3.62), *имеющее вид*

$$\bar{y}(x) = T(x)x^{m_k}e^{\lambda x}, \tag{3.64}$$

где $T(x)$ — многочлен той же степени, что и $S(x)$.

На основании этой теоремы частное решение ищется в указанном виде, где многочлен $P(x)$ или $T(x)$ записывается с неизвестными коэффициентами. Подставляя в уравнение (3.62), сокращая на $e^{\lambda x}$ и приравнивая члены с одинаковыми степенями x, получим систему неоднородных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов многочлена $P(x)$ или $T(x)$. Эта система будет разрешимой, поскольку существование решения такого вида обеспечено теоремой 3.15.

Доказательство теоремы 3.15 приведем для резонансного случая (3.64), так как (3.63) получается из (3.64) при $m_k = 0$. Подставим (3.64) в (3.62):

$$M(D)T(x)x^{m_k}e^{\lambda x} = e^{\lambda x}S(x) \tag{3.65}$$

и убедимся, что отсюда можно определить последовательно коэффициенты многочлена $T(x)$, начиная с коэффициента при старшей степени x^s. Выделим в многочленах $T(x)$ и $S(x)$ старшие члены:

$$S(x) = a_0x^s + S_1(x), \quad T(x) = b_0x^s + T_1(x).$$

Имеем тогда

$$M(D)b_0x^{s+m_k}e^{\lambda x} + M(D)x^{m_k}T_1(x)e^{\lambda x} = e^{\lambda x}a_0x^s + e^{\lambda x}S_1(x).$$

Распишем первое слагаемое слева, пользуясь формулой (3.54) и учитывая, что $M(\lambda) = M'(\lambda) = \cdots = M^{(m_k-1)}(\lambda) = 0$, а $M^{(m_k)}(\lambda) \neq 0$. Получим

$$\begin{gathered} b_0e^{\lambda x}\left\{\frac{M^{(m_k)}(\lambda)(s+m_k)\cdots(s+1)}{m_k!}x^s + \right. \\ \left. + \frac{M^{(m_k+1)}(\lambda)(s+m_k)\cdots s}{(m_k+1)!}x^{s-1} + \ldots\right\} + M(D)x^{m_k}T_1(x)e^{\lambda x} = \\ = e^{\lambda x}a_0x^s + e^{\lambda x}S_1(x). \end{gathered} \tag{3.66}$$

Заметим, что в $\{\cdot\}$ первое слагаемое имеет степень s, а прочие — более низкую. Приравнивая старшие члены и сокращая на $e^{\lambda x}x^s$, будем иметь

$$b_0M^{(m_k)}(\lambda)\frac{(s+m_k)\cdots(s+1)}{m_k!} = a_0.$$

Отсюда определится b_0 через a_0 в силу $M^{(m_k)}(\lambda) \neq 0$. После этого (3.66) можно записать в виде

$$M(D)x^{m_k}T_1(x)e^{\lambda x} = e^{\lambda x}\widetilde{S}_1(x), \tag{3.67}$$

где $\widetilde{S}_1(x)$ многочлен степени не выше $s-1$, полученный в результате перенесения вправо всех членов выражения $b_0 e^{\lambda x}\{\cdot\}$ (кроме первого), которые теперь известны.

Соотношение (3.67) представляет собой уравнение, аналогичное (3.65), но степени многочленов $T_1(x)$ и $\widetilde{S}_1(x)$ на единицу ниже $T(x)$ и $S(x)$. Из (3.67) аналогично предыдущему определится старший коэффициент многочлена $T_1(x) = a_1x^{s-1} + T_2(x)$, т. е. определятся уже два старших члена многочлена $T(x)$. Продолжая процесс, определим последовательно все члены $T(x)$.

Метод отыскания частного решения, основанный на доказанной теореме, будем называть *методом неопределенных коэффициентов.*

Итак, для уравнения с постоянными коэффициентами фундаментальная система решений, а в случае правой части вида $e^{\lambda x}S(x)$ также и частное решение неоднородного уравнения могут быть построены в эффективной форме путем алгебраических операций. В заключение укажем один специальный класс уравнений с переменными коэффициентами, для которого фундаментальную систему решений также можно построить эффективно. Это так называемое уравнение Эйлера

$$x^n a_0 y^{(n)} + x^{n-1}a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0, \quad a_i = \mathrm{const}. \tag{3.68}$$

Непосредственной выкладкой нетрудно убедиться, что заменой независимого переменного $x = e^{\xi}$ уравнение (3.68) сводится к уравнению с постоянными коэффициентами, что и решает вопрос об эффективном построении фундаментальной системы решений.

Для отыскания частного решения неоднородного уравнения Эйлера в случае, если правая часть имеет вид $x^{\lambda}S(\ln x)$, применим метод неопределенных коэффициентов.

§ 6. Системы линейных уравнений. Общая теория

Обратимся к изучению системы линейных дифференциальных уравнений

$$y_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x)y_k + f_i(x), \quad i = 1, \dots, n. \tag{3.69}$$

Система (3.69) называется *однородной*, если $f_i(x) = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$, в противном случае — *неоднородной*. Будем предполагать $a_{ik}(x)$ и $f_i(x)$ непрерывными на интервале X. Как было доказано выше (см. § 2), при этих условиях на X существует единственное решение системы (3.69), удовлетворяющее начальному условию

$$y_i(x_0) = y_i^0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.70}$$

Для системы уравнений справедливы теоремы, аналогичные тем, которые были доказаны для одного уравнения n-го порядка.

1. Матричная запись. В целях максимального упрощения формы изложения нам будет удобно пользоваться матричной записью. Напомним основные факты матричного исчисления, которые понадобятся для этого.

1°. Матрицей размерности $n \times m$ (или $(n \times m)$-матрицей) называется таблица чисел a_{ik} вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ik} называются *элементами матрицы*.

В настоящем параграфе мы будем использовать квадратные матрицы (иначе $(n\times n)$-матрицы) и так называемые столбцы (или $(n\times 1)$-матрицы)

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \quad \text{или просто} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Будем обозначать матрицы a, b, c и т. д., а их элементы соответственно a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} и т. д.

2°. Матрицы a и b считаются *равными*, если $a_{ij} = b_{ij}$. Матрица a считается *равной нулю*, если $a_{ij} = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$.

3°. Над $(n \times m)$-матрицами определены операции *сложения* и *умножения на число*.

Суммой матриц a и b называется матрица c (обозначается $c = a + b$) такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Произведением матрицы a на число α называется матрица c (обозначается $c = \alpha a$) такая, что $c_{ij} = \alpha a_{ij}$.

4°. Если a является $(n \times m)$-матрицей, а b является $(m \times p)$-матрицей, то *произведением матриц* a и b называется матрица c размерности $n \times p$ (обозначается $c = ab$) такая, что

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{m} a_{il} b_{lj}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, p.$$

Умножение матриц обладает сочетательным и распределительным свойствами.

Для квадратных матриц одинаковой размерности определено и произведение ab и произведение ba, но коммутативным свойством умножение матриц, вообще говоря не обладает, т. е. $ab \neq ba$.

5°. Матрицей, *обратной* к $n \times n$-матрице a, называется матрица c (обозначается $c = a^{-1}$) такая, что $aa^{-1} = a^{-1}a = E$, где $E = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ — так называемая единичная матрица, у которой элементы, находящиеся на главной диагонали, равны единице, все остальные элементы равны нулю. Элементы обратной матрицы могут быть найдены, например, по формулам $c_{ij} = \frac{1}{\Delta} A_{ji}$, где $\Delta = \operatorname{Det} a$, а $A_{ji} = (-1)^{j+i} M_{ji}$ — алгебраическое дополнение к элементу a_{ji}, M_{ji} — минор $(n-1)$-го порядка, получающийся из определителя a вычеркиванием j-й строки и i-го столбца; $j, i = 1, \ldots, n$.

Будем рассматривать также матрицы, у которых элементы являются функциями x. Для таких матриц помимо вышеуказанных операций определены также операции анализа — дифференцирование и интегрирование.

6°. *Производной $a'(x)$ от матрицы $a(x)$* с элементами $a_{ij}(x)$ называется матрица с элементами a'_{ij}. Правила дифференцирования суммы и произведения сохраняются и для матриц, только при дифференцировании произведения матриц необходимо сохранять порядок сомножителей:

$$(ab)' = a'b + ab'.$$

7°. $\int\limits_{x_0}^{x} a(x)\,dx$ определяется как матрица с элементами

$$\int\limits_{x_0}^{x} a_{ij}(x)\,dx.$$

2. Общие свойства системы линейных уравнений. Обратимся к системе (3.69). Обозначим через y, f и y^0 столбцы

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix},$$

а через $A(x)$ обозначим $(n \times n)$-матрицу с элементами $a_{ij}(x)$:

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (3.69) можно записать в виде одного уравнения

$$y' = A(x)y + f(x) \tag{3.71}$$

точно так же, как и начальные условия

$$y(x_0) = y^0. \tag{3.72}$$

Пользуясь правилом умножения 4°, правилом сложения 3° и правилом равенства матриц 2°, нетрудно убедиться в том, что (3.71) и (3.72) те же самые, что и (3.69) и (3.70).

В силу свойств умножения и дифференцирования матриц для дифференцируемых столбцов имеет место тождество (ср. (3.34)), в котором α_i — постоянные числа,

$$\Big(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_{(i)}\Big)' - A\Big(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_{(i)}\Big) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (u'_{(i)} - Au_{(i)}), \tag{3.73}$$

выражающее свойство линейности оператора $y' - Ay \equiv L[y]$ на множестве дифференцируемых столбцов.

Здесь и в дальнейшем для нумерации столбцов будем употреблять индекс, заключенный в круглые скобки, оставляя индекс без скобок для обозначения элементов (компонент).

Непосредственным следствием этого тождества является принцип суперпозиции.

Теорема 3.16. *Пусть в уравнении* (3.71) $f(x)$ *является линейной комбинацией* $f_{(i)}(x)$, *т. е.*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_{(i)}(x),$$

где α_i *— постоянные числа, и пусть* $y_{(i)}(x)$ *является решением уравнения*

$$y'_{(i)} = A(x)y_{(i)} + f_{(i)}.$$

Тогда линейная комбинация $y_{(i)}(x)$ *с теми же коэффициентами* α_i, *т. е. столбец* $y(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_{(i)}(x)$, *является решением уравнения* (3.71).

Имеют также место теоремы, аналогичные теоремам 3.4–3.6.

3. Однородное уравнение. Рассмотрим более детально однородное уравнение

$$y' = A(x)y. \tag{3.74}$$

Пусть имеется n столбцов

$$y_{(i)} = \begin{pmatrix} y_{(i)1} \\ \vdots \\ y_{(i)n} \end{pmatrix}.$$

Составим из этих столбцов матрицу $W(x)$:

$$W(x) = \begin{pmatrix} y_{(1)1}(x) & \dots & y_{(n)1}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{(1)n}(x) & \dots & y_{(n)n}(x) \end{pmatrix}. \tag{3.75}$$

Сопоставим уравнению (3.74), правая и левая части которого столбцы, аналогичное уравнение

$$W' = A(x)W, \tag{3.76}$$

правая и левая части которого — матрицы размерности $(n \times n)$ и в котором неизвестной является матрица $W(x)$.

Теорема 3.17. *Пусть $y_{(1)}, \dots, y_{(n)}$ есть n решений уравнения* (3.74). *Тогда $(n \times n)$-матрица $W(x)$, образованная из них по формуле* (3.75), *является решением матричного уравнения* (3.76).

Обратно: если $W(x)$ является решением уравнения (3.76), *то каждый столбец матрицы $W(x)$ является решением уравнения* (3.74).

Доказательство. Достаточно расписать (3.76) и (3.74) поэлементно. Действительно, (3.76) означает

$$W'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} W_{kj} \tag{3.77}$$

или

$$y'_{(j)i} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_{(j)k}, \tag{3.78}$$

а (3.74) означает

$$y'_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k. \tag{3.79}$$

Поэтому если $y_{(j)}$ являются решениями (3.74), то каждое $y_{(j)}$ удовлетворяет (3.79), т.е. справедливо (3.78) или, что то же, (3.77), а значит, и (3.76), и наоборот, если справедливо (3.76), то и (3.78), а это в сопоставлении с (3.79) означает, что $y_{(j)}$ $(j = 1, \dots, n)$ является решением уравнения (3.74).

Отметим еще следующие факты, проверяемые столь же просто.

Теорема 3.18. *Если $W(x)$ — решение уравнения* (3.76), *то выражение WB является решением уравнения* (3.74), *если B — произвольный постоянный столбец, и решением уравнения* (3.76), *если B — произвольная постоянная $(n \times n)$-матрица.*

Определение. Будем говорить, что столбцы $u_{(1)}, \ldots, u_{(p)}$ *линейно зависимы на интервале X*, если существуют постоянные $C_1, \ldots, C_p$ не все равные нулю, такие, что имеет место тождество

$$\sum_{i=1}^{p} C_i u_{(i)}(x) \equiv 0, \quad x \in X. \tag{3.80}$$

Если же (3.80) выполняется только при $C_1 = \cdots = C_p = 0$, то будем говорить, что $u_{(1)}, \ldots, u_{(p)}$ *линейно независимы.*

Рассмотрим n дифференцируемых столбцов $y_{(1)}, \ldots, y_{(n)}$. Запишем для них равенство (3.80):

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_{(i)}(x) \equiv 0. \tag{3.81}$$

Введем в рассмотрение постоянный столбец $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$. Пользуясь этим столбцом и матрицей $W(x)$, составленной из $y_{(i)}$ по правилу (3.75), можно (3.81) записать в виде

$$WC = 0. \tag{3.82}$$

Так как согласно п. 2° правил матричного исчисления C считается равным нулю, если все C_i $(i = 1, \ldots, n)$ равны нулю, то определение линейной зависимости и независимости $y_{(1)}, \ldots, y_{(n)}$ можно сформулировать следующим образом.

Определение. Будем говорить, что столбцы $y_{(1)}, \ldots, y_{(n)}$ *линейно зависимы на интервале* X, если существует постоянный столбец $C \neq 0$ такой, что тождественно на X имеет место (3.82).

В противном случае, т. е. если (3.82) справедливо только при $C = 0$, будем говорить, что $y_{(1)}, \ldots, y_{(n)}$ *линейно независимы.*

Определение. Назовем $\Delta(x) = \operatorname{Det} W(x)$ *определителем Вронского* для $y_{(1)}, \ldots, y_{(n)}$.

Теперь можно сформулировать и доказать теоремы, аналогичные теоремам 3.7–3.9 из теории уравнений n-го порядка. Все эти доказательства записываются весьма компактно, если пользоваться введенной матричной записью, которая очень удобна и требует лишь некоторого навыка.

Теорема 3.19. *Если решения $y_{(1)}, \ldots, y_{(n)}$ уравнения* (3.74) *линейно зависимы на X, то $\Delta(x) \equiv 0$ на X.*

Доказательство. Имеем $WC = 0$, $C \neq 0$. Эта запись является кратким обозначением того факта, что при каждом x величины $C_1, \ldots, C_n$ удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений с определителем $\Delta(x)$, и так как решение нетривиальное, то $\Delta(x) = 0$ при любом $x \in X$, т. е. $\Delta(x) \equiv 0$.

Теорема 3.20. *Если $\Delta(x) = 0$ хотя бы для одного $x \in X$, то решения $y_{(1)}, \ldots, y_{(n)}$ уравнения* (3.74) *линейно зависимы на X.*

Доказательство. Запишем кратко доказательство этой теоремы, уже не давая дополнительных разъяснений, как в предыдущей. Возьмем $x_0 \in X$, и пусть $\Delta(x_0) = 0$. Составим уравнение $W(x_0)C = 0$ относительно C. В силу $\Delta(x_0) = 0$ существует решение $C \neq 0$. Положим $y(x) = W(x)C$. Согласно теореме 3.18 это — решение уравнения (3.74), причем $y(x_0) = W(x_0)C = 0$, а тогда, в силу теоремы единственности, $y(x) \equiv 0$ и, таким образом, $W(x)C \equiv 0$, что означает линейную зависимость $y_{(1)}, \ldots, y_{(n)}$.

Теорема 3.21 (альтернатива). *Определитель Вронского либо тождественно равен нулю, и это означает, что решения $y_{(1)}, \ldots, y_{(n)}$ линейно зависимы, либо не обращается в нуль ни в одной точке X, и это означает, что решения $y_{(1)}, \ldots, y_{(n)}$ линейно независимы.*

Определение. ***Фундаментальной системой решений уравнения*** (3.74) будем называть n линейно независимых решений $y_{(1)}, \ldots$ $\ldots, y_{(n)}$ уравнения (3.74), а соответствующую им по формуле (3.75) матрицу $W(x)$ будем называть фундаментальной матрицей.

На основании теоремы 3.20 можно дать другое (эквивалентное) определение фундаментальной матрицы.

Определение. Решение $W(x)$ уравнения (3.76), для которого $\Delta(x)$ отлично от нуля всюду на X, называется *фундаментальной матрицей.*

Теорема 3.22. *Линейная однородная система уравнений имеет фундаментальную матрицу.*

В силу теоремы 3.21 достаточно взять произвольную матрицу $a = \mathrm{const}$ с отличным от нуля определителем и задать для W начальное условие $W(x_0) = a$.

Теорема 3.23. *Если* $W(x)$ — *фундаментальная матрица, то любое решение* $y(x)$ *уравнения* (3.74) *представимо в виде*

$$y(x) = W(x)C, \tag{3.83}$$

где C — *некоторый постоянный столбец.*

Доказательство. Пусть $y(x_0) = y^0$. Определим C уравнением $W(x_0)C = y^0$, которое разрешимо в силу $\Delta(x_0) \neq 0$. Построим $\widetilde{y}(x) = W(x)C$. Так как $\widetilde{y}(x_0) = W(x_0)C = y^0$, то в силу теоремы единственности $y(x) \equiv \widetilde{y}(x) = W(x)C$, что и требовалось.

Замечание. На языке линейной алгебры теоремы 3.22 и 3.23 означают, что пространство решений уравнения (3.74) n-мерно.

Построим решение уравнения (3.74), удовлетворяющее условиям (3.72), выразив с помощью $W(x)$ величину C через y^0. Имеем

$$y(x_0) = W(x_0)C = y^0,$$

откуда $C = W^{-1}(x_0)y^0$ и, следовательно,

$$y(x) = W(x)W^{-1}(x_0)y^0.$$

Матрицу $\mathcal{K}(x, x_0) = W(x)W^{-1}(x_0)$, являющуюся функцией двух переменных x и x_0, назовем (ср. § 4) *импульсной матрицей*, или *матрицантом*. В силу теоремы 3.18 $\mathcal{K}(x, x_0)$ как функция x удовлетворяет уравнению (3.76). Кроме того, очевидно, что

$$\mathcal{K}(x_0, x_0) = E.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3.24. *Решение задачи* (3.74), (3.72) *имеет вид*

$$y(x) = \mathcal{K}(x, x_0)y^0, \tag{3.84}$$

где матрица $\mathcal{K}(x, x_0)$ *удовлетворяет по аргументу* x *матричному уравнению* (3.76) *и условию* $\mathcal{K}(x_0, x_0) = E$.

4. Неоднородное уравнение. Рассмотрим теперь неоднородное уравнение (3.71).

Теорема 3.25. *Если* $W(x)$ — *фундаментальная матрица, а* $\bar{y}(x)$ — *частное решение неоднородного уравнения* (3.71), *то любое решение* $y(x)$ *уравнения* (3.71) *представимо в виде*

$$y(x) = W(x)C + \bar{y}(x), \tag{3.85}$$

где C — *некоторый постоянный столбец.*

Доказательство точно такое же, как в случае уравнения n-го порядка, и мы его опускаем.

Построим частное решение $\bar{y}(x)$, удовлетворяющее нулевым начальным условиям $\bar{y}(x_0) = 0$. Будем искать его в виде

$$\bar{y}(x) = W(x)C(x),$$

где $C(x)$ — неизвестный столбец. Это фактически просто замена переменных. Подставляя $y(x)$ в (3.71), получим

$$W'C + WC' = AWC + f.$$

Так как W удовлетворяет (3.76), то $W' - AW = 0$ и, следовательно, $WC' = f$. Отсюда $C' = W^{-1}f$. А так как $\bar{y}(x_0) = W(x_0)C(x_0) = 0$, то $C(x_0) = 0$ и, следовательно,

$$C(x) = \int\limits_{x_0}^{x} W^{-1}(\xi)f(\xi)\,d\xi.$$

Таким образом,

$$\bar{y}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} W(x)W^{-1}(\xi)f(\xi)\,d\xi = \int\limits_{x_0}^{x} \mathcal{K}(x,\xi)f(\xi)\,d\xi$$

и справедлива

Теорема 3.26. *Частное решение* $\bar{y}(x)$ *уравнения* (3.71), *удовлетворяющее условию* $\bar{y}(x_0) = 0$, *имеет вид*

$$\bar{y}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \mathcal{K}(x,\xi)f(\xi)\,d\xi, \tag{3.86}$$

где $\mathcal{K}(x,\xi)$ — *импульсная матрица, или матрицант, — решение матричного уравнения* (3.76), *удовлетворяющее условию* $\mathcal{K}(\xi,\xi) = E$.

Замечания.

1. Изложенный метод построения частного решения системы линейных уравнений фактически является вариантом метода вариации постоянных, который для одного уравнения использовался в гл. 2 (с. 31–33).

2. В силу принципа суперпозиции решение $y(x)$ задачи (3.71), (3.72) имеет вид

$$y(x) = \mathcal{K}(x,x_0)y^0 + \int\limits_{x_0}^{x} \mathcal{K}(x,\xi)f(\xi)\,d\xi. \tag{3.87}$$

§ 7. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пусть в (3.74) A — постоянная матрица,

$$y' = Ay, \quad A = \text{const}. \tag{3.88}$$

В этом случае построение фундаментальной системы решений или фундаментальной матрицы сводится к алгебраическим операциям.

Будем искать частное решение системы (3.88) в виде $\alpha e^{\lambda x}$, где λ — неизвестный параметр, α — неизвестный постоянный столбец. Подставляя это выражение в (3.88), получим $\lambda\alpha e^{\lambda x} = A\alpha e^{\lambda x}$. Отсюда делаем вывод, что α должно быть решением алгебраической системы уравнений

$$(A - \lambda E)\alpha = 0. \tag{3.89}$$

Для того чтобы α было нетривиальным решением, нужно потребовать, чтобы

$$\text{Det}(A - \lambda E) = 0. \tag{3.90}$$

Это уравнение является алгебраическим уравнением степени n и называется *характеристическим уравнением* уравнения (3.88).

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — простые корни характеристического уравнения (3.90). Каждому λ_i отвечает $\alpha_{(i)} \neq 0$ (собственный вектор матрицы A), который находится из (3.89), где положено $\lambda = \lambda_i$. В качестве компонент $\alpha_{(i)}$ можно взять, например, алгебраические дополнения к одной из строк определителя $\text{Det}(A - \lambda_i E)$.

Теорема 3.27. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — простые корни характеристического уравнения* (3.90) *и пусть $\alpha_{(i)}$ — решение* (*нетривиальное*) *уравнения $(A - \lambda_i E)\alpha = 0$. Тогда столбцы $\alpha_{(i)} e^{\lambda_i x}$ $(i = 1, \ldots, n)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения* (3.88).

Доказательство проводится по схеме, которая была использована в § 5. Предположим, что решения $\alpha_{(i)} e^{\lambda_i x}$ линейно зависимы:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i \alpha_{(i)} e^{\lambda_i x} = 0, \quad C_1 \neq 0. \tag{3.91}$$

Отсюда имеем

$$C_1 \alpha_{(1)} e^{(\lambda_1 - \lambda_n)x} + \cdots + C_{n-1} \alpha_{(n-1)} e^{(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x} + C_n \alpha_{(n)} = 0.$$

Дифференцируя это равенство, приходим к соотношению типа (3.91), содержащему уже $n-1$ слагаемых. Повторяя операцию, приходим в конце концов к равенству $C_1 \alpha_{(1)} = 0$. Так как хотя бы одна из компонент $\alpha_{(1)}$ отлична от нуля, то получаем отсюда $C_1 = 0$, что противоречит (3.91).

Обратимся к общему случаю. Пусть характеристическое уравнение (3.90) имеет корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_i$ кратностей $m_1, \ldots, m_i$ $(m_1 + \cdots \cdots + m_i = n)$. Из предыдущего ясно, что $\alpha_{(i)} e^{\lambda_i x}$, где $\alpha_{(i)}$ — собственный вектор, отвечающий λ_i, будет решением уравнения (3.88). Каждому λ_i в рассматриваемом случае может отвечать несколько собственных векторов, но, вообще говоря, их число $p_i \leqslant m_i$. Таким образом, решений вида $\alpha_{(i)} e^{\lambda_i x}$ может быть меньше n и они, следовательно, не образуют фундаментальной системы решений.

Для того чтобы выяснить, откуда взять «недостающие» решения, потребуются некоторые построения, к которым и перейдем. Пусть y — решение уравнения (3.88). Тогда компоненты y_i этого решения удовлетворяют системе уравнений

$$a_{i1} y_1 + \cdots + a_{in} y_n - D y_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.92}$$

где D — оператор дифференцирования (см. замечание 2 к лемме 3.1). Определитель $\operatorname{Det}(A - ED) \equiv M(D)$ представляет собой некоторый операторный многочлен n-й степени. Если вместо D подставить λ, то получится левая часть характеристического уравнения (3.90) или характеристический многочлен системы (3.88). Так как умножение операторных многочленов можно производить по правилу умножения обычных многочленов, то, умножая (3.92) на алгебраические дополнения $A_{ij}(D)$ определителя $\operatorname{Det}(A - ED)$ (умножение понимается как умножение операторов) и суммируя по i, получаем

$$M(D) y_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

а это — дифференциальное уравнение порядка n относительно y_j, характеристический многочлен которого совпадает с характеристическим многочленом системы (3.88). Таким образом, справедлива следующая

Теорема 3.28. *Каждая компонента y_j решения y системы* (3.88) *удовлетворяет уравнению n-го порядка, характеристический многочлен которого равен характеристическому многочлену системы* (3.88).

Рассмотрим корень λ_k кратности m_k. Индекс k будем в нижеследующих рассуждениях опускать, так как будем иметь дело только с одним корнем. Этому корню λ отвечает решение y системы (3.88), j-я компонента которого y_j в силу теоремы 3.28 имеет вид (см. теорему 3.14)

$$y_j = (C_{1j} + C_{2j} x + \cdots + C_{mj} x^{m-1}) e^{\lambda x},$$

где $C_{kj} = \text{const}$, и, таким образом,

$$y = \begin{pmatrix} C_{11} + C_{21}x + \cdots + C_{m1}x^{m-1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_{1n} + C_{2n}x + \cdots + C_{mn}x^{m-1} \end{pmatrix} e^{\lambda x}. \tag{3.93}$$

В этом выражении, однако, поскольку компоненты y_j не независимы, а связаны системой (3.92), постоянные C_{kj} *не являются независимыми.*

Оказывается, *в выражении* (3.93) *число независимых констант* C_{kj} *равно кратности* m *корня* λ. Обоснованием этого факта мы займемся ниже, а пока выясним, что́ это дает для построения фундаментальной системы решений уравнения (3.88).

Обозначим свободные постоянные через $C_1, \dots, C_m$. Подставим (3.93) в (3.88), сократим на $e^{\lambda x}$ и приравняем члены с одинаковыми степенями x. Тогда получится линейная алгебраическая система $m \times n$ однородных уравнений с $m \times n$ неизвестными C_{kj}, которые можно выразить линейно через свободные постоянные $C_1, \dots, C_m$. После этого (3.93) можно записать в виде

$$y = [C_1 p_1(x) + \cdots + C_m p_m(x)]e^{\lambda x}, \tag{3.94}$$

где $p_i(x)$ — столбцы, компоненты которых являются вполне определенными многочленами относительно x степени не выше $m - 1$.

Из (3.94) следует, что корню характеристического уравнения λ кратности m отвечают m решений вида $p_i(x)e^{\lambda x}$ $(i = 1, \dots, m)$. Такое построение можно проделать для каждого λ_k кратности m_k. В результате получим $m_1 + \cdots + m_l = n$ решений.

Ниже будет доказано, что *полученные описанным способом* n *решений образуют фундаментальную систему решений уравнения* (3.88).

Практически для нахождения фундаментальной системы решений рекомендуется для каждого λ написать выражение (3.93), затем подставить в (3.88) и из полученной указанным выше способом алгебраической системы выразить все постоянные через свободные постоянные. То, что число свободных постоянных заранее известно и равно кратности m корня λ, помогает решению этой алгебраической системы, так как это означает, что заранее известен ее ранг.

П р и м е р 3.2.

$$y_1' = 4y_1 - y_2, \quad y_2' = 3y_1 + y_2 - y_3, \quad y_3' = y_1 + y_3. \tag{3.95}$$

Характеристическое уравнение, отвечающее этой системе, имеет корень $\lambda_1 = 2$ кратности $m_1 = n = 3$. Согласно изложенному выше правилу пишем выражение

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \\ b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \\ c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \end{pmatrix} e^{2x}. \tag{3.96}$$

Подставляя его в (3.95), сокращая на e^{2x} и приравнивая члены с одинаковыми степенями x, получим следующие 9 уравнений для определения 9-ти коэффициентов:

$$\begin{aligned} &a_1 = 2a_0 - b_0, && 2a_2 = 2a_1 - b_1, && 0 = 2a_2 - b_2, \\ &b_1 = 3a_0 - b_0 - c_0, && 2b_2 = 3a_1 - b_1 - c_1, && 0 = 3a_2 - b_2 - c_2, \\ &c_1 = a_0 - c_0, && 2c_2 = a_1 - c_1, && 0 = a_2 - c_2. \end{aligned} \tag{3.97}$$

Заранее известно, что ранг этой системы равен 6 и свободных неизвестных 3.

Записывая определитель этой системы, расположив неизвестные в порядке $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ легко видеть, что правый верхний определитель 6-го порядка отличен от нуля и равен, очевидно, произведению диагональных элементов, т. е. 8, так как справа от главной диагонали — нули. Следовательно, в качестве свободных неизвестных можно взять a_0, b_0, c_0.

Первая группа уравнений (3.97) уже дает выражения для a_1, b_1, c_1 через a_0, b_0, c_0, а подставляя их во вторую группу уравнений (3.97), получим

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_0 - b_0 + c_0), \quad b_2 = a_0 - b_0 + c_0, \quad c_2 = \frac{1}{2}(a_0 - b_0 + c_0).$$

Третья группа уравнений (3.97) обращается автоматически в тождество.

Подставляя полученные выражения в (3.96) и приводя его к виду (3.94), будем иметь

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \left[a_0 \begin{pmatrix} 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 \\ 3x + x^2 \\ x + \frac{1}{2}x^2 \end{pmatrix} + b_0 \begin{pmatrix} -x - \frac{1}{2}x^2 \\ 1 - x - x^2 \\ -\frac{1}{2}x^2 \end{pmatrix} + \right.$$
$$\left. + c_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x^2 \\ -x + x^2 \\ 1 - x + \frac{1}{2}x^2 \end{pmatrix} \right] e^{2x}. \tag{3.98}$$

Здесь a_0, b_0, c_0 — произвольные постоянные (можно их обозначить C_1, C_2, C_3, как в (3.94)), векторы $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ усматриваются в правой части (3.98). Таким образом, получено решение системы (3.95) в виде линейной комбинации трех линейно независимых решений $p_i(x)e^{2x}$ $(i = 1, 2, 3)$.

Чтобы обосновать указанный прием, нужно фактически обосновать два момента: во-первых, то, что в выражении (3.93) число независимых констант C_{kj} равно кратности m корня λ, и, во-вторых, то, что решения вида $p_{ki}(x)e^{\lambda_k x}$ $(i = 1, \ldots, m_k;\ k = 1, \ldots, l)$ действительно образуют фундаментальную систему решений уравнения (3.88). Для этого потребуется более точное представление о структуре решений, отвечающих каждому корню характеристического уравнения, чем то, которое дается формулой (3.93). Перейдем к получению такого представления. Будем иначе вести нумерацию корней характеристического уравнения или, что то же самое, характеристических чисел матрицы A, а именно будем нумеровать собственные векторы. Тем самым каждое значение λ нумеруется столько раз, сколько линейно независимых собственных векторов ему отвечает. Например, если λ_1 отвечают собственные векторы $\alpha_{(11)}, \alpha_{(12)}, \ldots, \alpha_{(1p_1)}$, а λ_2 — собственные векторы $\alpha_{(21)}, \alpha_{(22)}, \ldots, \alpha_{(2p_2)}$ и т. д., то будем говорить, что имеются характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p_1}$, $\lambda_{p_1+1}, \ldots, \lambda_{p_1+p_2}$ и т. д. (при этом $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{p_1}$, $\lambda_{p_1+1} = \cdots = \lambda_{p_1+p_2}$). Таким образом, имеются $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, каждому из которых отвечает собственный вектор.

Дальнейшие построения основаны на следующей алгебраической теореме.

Теорема 3.29 (см. [15]). *Существует n линейно независимых постоянных векторов (столбцов) $(k = 1, \ldots, s;\ j_k = 1, \ldots, q_k)$, удовлетворяющих соотношениям*

$$\begin{aligned} &Ae_{(k1)} = \lambda_k e_{(k1)}, \\ &Ae_{(k2)} = \lambda_k e_{(k2)} + e_{(k1)}, \quad k = 1, \ldots, s; \quad q_1 + \cdots + q_s = n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &Ae_{(kq_k)} = \lambda_k e_{(kq_k)} + e_{(kq_{k-1})}, \end{aligned} \tag{3.99}$$

причем сумма q_k, отвечающих одинаковым λ_k, равна m, где m — кратность корня λ_k характеристического уравнения (3.90).

В (3.99) через $e_{(k1)}$ обозначен собственный вектор, отвечающий λ_k. Векторы $e_{(k2)}, \ldots, e_{(kq_k)}$ называются *присоединенными векторами*, порожденными собственным вектором $e_{(k1)}$. Таким образом, каждому λ_k отвечают q_k линейно независимых векторов, среди которых один собственный вектор и остальные присоединенные, а всем

$\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ отвечают n линейно независимых векторов. Напомним, что λ_k для разных k могут быть одинаковыми.

Рассмотрим λ_k. Ему заведомо отвечает решение $y_{(k1)} = e_{(k1)}e^{\lambda_k x}$. Оказывается, ему отвечает еще $q_k - 1$ (и всего, таким образом, q_k) решений, как утверждается следующей теоремой.

Теорема 3.30. *Каждому λ_k отвечает q_k решений вида*

$$
\begin{aligned}
&y_{(k1)} = e_{(k1)} \exp \lambda_k x,\\
&y_{(k2)} = (e_{(k2)} + x e_{(k1)}) \exp(\lambda_k x),\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_{(kj)} = \left(e_{(kj)} + x e_{(k,j-1)} + \cdots + \frac{x^{j-1}}{(j-1)!} e_{(k1)}\right) \exp(\lambda_k x),\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_{(kq_k)} = \left(e_{(kq_k)} + x e_{(k,q_k-1)} + \cdots + \frac{x^{q_k-1}}{(q_k-1)!} e_{(k1)}\right) \exp(\lambda_k x).
\end{aligned}
\tag{3.100}
$$

Доказательство. Это нетрудно доказать непосредственной проверкой, пользуясь (3.99). Действительно,

$$
\begin{aligned}
&(A - ED)\left\{e_{(kj)} + x e_{(k,j-1)} + \cdots + \frac{x^{j-1}}{(j-1)!} e_{(k1)}\right\} \exp(\lambda_k x) =\\
&=(A-\lambda_k E)\{\cdots\} \exp(\lambda_k x) - \left\{e_{(k,j-1)} + \ldots + \frac{x^{j-2}}{(j-2)!} e_{(k1)}\right\} \exp(\lambda_k x) =\\
&= \exp(\lambda_k x)\left\{(A - \lambda_k E)e_{kj} + \cdots + \frac{x^{j-1}}{(j-1)!}(A - \lambda_k E)e_{(k1)}\right\} -\\
&\qquad - \left\{e_{(k,j-1)} + \cdots + \frac{x^{j-2}}{(j-2)!} e_{(k1)}\right\} \exp(\lambda_k x) =\\
&= \exp(\lambda_k x)\left\{e_{(k,j-1)} + \cdots + \frac{x^{j-2}}{(j-2)!} e_{(k1)}\right\} -\\
&\qquad - \left\{e_{(k,j-1)} + \cdots + \frac{x^{j-2}}{(j-2)!} e_{(k1)}\right\} \exp(\lambda_k x) = 0.
\end{aligned}
$$

Итак, каждому λ_k $(k = 1, \ldots, s)$ отвечает q_k решений вида (3.100), и, таким образом, всего имеется $q_1 + \cdots + q_s = n$ решений:

$$
y_{(11)}, \ldots, y_{(1q_1)}, \ldots, y_{(s1)}, \ldots, y_{(sq_s)}. \tag{3.101}
$$

Теорема 3.31. *Решения* (3.101) *образуют фундаментальную систему решений.*

Доказательство. Действительно,

$$
y_{(k1)}(0) = e_{(k1)}, \ \ldots, \ y_{(kq_k)}(0) = e_{(kq_k)}, \quad k = 1, \ldots, s,
$$

а согласно теореме 3.29 столбцы $e_{(k1)}, \ldots, e_{(kq_k)}$ $(k = 1, \ldots, s)$ в количестве $q_1 + \cdots + q_s = n$ являются линейно независимыми и, следовательно, $\operatorname{Det} W(0) \neq 0$. В силу теоремы 3.19 отсюда следует, что решения (3.101) линейно независимы, т. е. образуют фундаментальную систему решений.

Вернемся теперь к прежней нумерации корней характеристического уравнения, когда нумеруются различные по величине λ. Каждому λ может отвечать несколько групп решений вида (3.101) по числу отвечающих этому λ собственных векторов, но общее число решений в этих группах равно кратности m корня λ. Таким образом, действительно, линейная комбинация решений, отвечающих данному λ, имеет вид (3.93), где независимых констант будет m, так как число решений типа (3.101), отвечающих этому λ, есть m. Заметим, что, как видно из (3.100), (3.101), старшая степень многочленов в (3.93), вообще говоря, меньше, чем $m - 1$.

При практическом вычислении фундаментальной системы решений можно пользоваться (3.100), предварительно найдя все собственные и присоединенные векторы, но проще поступать, как указано выше, подставляя (3.93) в исходное уравнение (3.88) и выделяя m свободных неизвестных C_{kj}.

§ 8. Построение решения линейного уравнения в виде степенного ряда

Линейное уравнение с постоянными коэффициентами представляет собой некоторый класс уравнений, для которых фундаментальная система решений может быть выписана эффективным образом.

Как же строится фундаментальная система решений в общем случае уравнения с переменными коэффициентами? Цель настоящего параграфа — дать представление о способе построения фундаментальной системы решений, использующем теорию степенных рядов и применимом, когда коэффициенты уравнения являются аналитическими функциями, т. е. представимы в виде степенных рядов. Идея метода такова. Решение ищется в простейшем случае в виде ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, затем этот ряд подставляется в уравнение, в котором коэффициенты записываются также в виде степенных рядов, после чего вся левая часть записывается в виде степенного ряда. Приравнивая в полученном степенном ряде коэффициенты при каждой степени x нулю, получим уравнение для определения a_k.

Отметим, что, строя решение в виде степенного ряда, мы во многих случаях получаем так называемые *специальные функции*, широко используемые как в теоретических, так и в прикладных вопросах (например, функции Бесселя, гипергеометрические функции и др.).

Не задаваясь целью изложить метод в общем виде — это является предметом специального раздела теории дифференциальных уравнений, так называемой аналитической теории дифференциальных уравнений [27; гл.5], продемонстрируем его на примере одного уравнения, нередко встречающегося в приложениях.

Рассмотрим уравнение

$$y'' + xy = 0, \tag{3.102}$$

называемое уравнением Эйри. Оно встречается в различных приложениях, например, в квантовой механике. Это простейшее уравнение второго порядка с переменным коэффициентом, однако оно не поддается решению элементарными методами.

Будем искать решение уравнения (3.102) в виде так называемого формального ряда

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{3.103}$$

Заранее ничего не известно о сходимости этого ряда, и поэтому все операции, которые мы сейчас будем проделывать с этим рядом, будут носить формальный характер; на эти операции надо смотреть как на алгоритм определения коэффициентов ряда a_k. Когда же коэффициенты будут определены, перейдем к этапу обоснования того, что ряд (3.103) в самом деле сходится и определяемая им функция $y(x)$ действительно является решением уравнения (3.102).

Итак, дифференцируем формально ряд (3.103) и подставляем в (3.102). Получим

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = 0. \tag{3.104}$$

Приравниваем теперь коэффициенты при одинаковых степенях x. Имеем

$$\begin{array}{lll} x^0) & a_2\cdot 2\cdot 1=0; & \text{отсюда } a_2=0, \\ x^1) & a_3\cdot 3\cdot 2+a_0=0; & \text{отсюда } a_3=-\frac{a_0}{3\cdot 2}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x^{k-2}) & a_k\cdot k\cdot(k-1)+a_{k-3}=0; & \text{отсюда } a_k=-\frac{a_{k-3}}{k(k-1)}. \end{array} \tag{3.105}$$

Из (3.105) видно, что

1) коэффициенты вида a_{3q} выражаются через a_0:

$$a_{3q} = -\frac{1}{3q(3q-1)}q_{3q-3} = \cdots = \frac{(-1)^q}{3q\cdot(3q-1)\cdots 3\cdot 2}a_0,$$

причем само a_0 остается неопределенным,

2) коэффициенты вида a_{3q+1} выражаются через a_1:

$$a_{3q+1} = \frac{(-1)^q}{(3q+1)\cdot 3q\cdots 4\cdot 3}a_1,$$

причем само a_1 остается неопределенным, и, наконец,

3) коэффициенты вида q_{3q+2} выражаются через a_2:

$$a_{3q+2} = \frac{(-1)^q}{(3q+2)\cdot(3q+1)\cdots 5\cdot 4}a_2 = 0,$$

так как $a_2 = 0$.

Положим $a_0 = 1$, $a_1 = 0$. Получим ряд

$$y_1(x) = \sum_{q=0}^{\infty} a_{3q}x^{3q} = 1 + \sum_{q=1}^{\infty}\frac{(-1)^q}{3q\cdot(3q-1)\cdots 3\cdot 2}x^{3q}. \tag{3.106}$$

Полагая, напротив, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, получим ряд

$$y_2(x) = \sum_{q=0}^{\infty} a_{3q+1}x^{3q+1} = x + \sum_{q=1}^{\infty}\frac{(-1)^q}{(3q+1)\cdot 3q\cdots 4\cdot 3}x^{3q+1}. \tag{3.107}$$

Теорема 3.32. *Ряды* (3.106) *и* (3.107) *сходятся, и определяемые ими функции* $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ *образуют фундаментальную систему решений уравнения* (3.102).

Доказательство. Действительно, сходимость рядов (3.106) и (3.107) элементарно устанавливается для любого x, например, по признаку Даламбера [16], и, таким образом, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ определены всюду на $(-\infty, \infty)$. Так как степенной ряд на интервале сходимости можно почленно произвольное число раз дифференцировать, то, проделывая это дифференцирование, подставляя в левую часть (3.102) (см. (3.104)) и складывая затем оба ряда, получим в силу самого определения коэффициентов a_k ряд, состоящий из нулевых членов. Тем самым уравнение обращается в тождество.

Линейную независимость $y_1(x)$ и $y_2(x)$ можно доказать от противного. Пусть $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) \equiv 0$, причем $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$. Положим $x = 0$. Тогда $y_2(0) = 0$, $y_1(0) = 1$, следовательно, $C_1 = 0$. Имеем тогда $C_2y_2(x) \equiv 0$, но тогда $y_2(x) \equiv 0$, что противоречит, например, тому, что $y_2'(0) = 1$. Таким образом, теорема доказана.

ГЛАВА 4

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

§ 1. Постановка краевых задач и их физическое содержание

В предыдущих главах изучение дифференциальных уравнений было в основном посвящено решению начальной задачи, в которой в качестве дополнительных условий задаются начальные условия, определяющие значения неизвестной функции и ее производных при фиксированном значении независимой переменной. Однако, как указывалось в гл. 1, начальные условия не являются единственно возможной формой дополнительных условий, выделяющих определенное частное решение. Во многих случаях в качестве дополнительных условий задаются граничные условия, определяющие значения неизвестной функции и ее производных (или некоторых выражений от них) при нескольких фиксированных значениях независимого переменного. Задачу определения частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным граничным условиям, будем называть краевой задачей. Исследование общих свойств и методов решения краевых задач и составляет содержание настоящей главы, при этом основное внимание будет уделено изучению краевых задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

К краевым задачам для дифференциальных уравнений сводятся многие математические и физические задачи. Так, рассмотренная в гл. 1 задача определения состояния статического равновесия закрепленного в граничных сечениях упругого стержня с коэффициентом упругости $k(x)$ под действием внешней силы $f(x)$ сводится к краевой задаче

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] = -f(x), \quad u(0) = 0, \quad u(l) = 0. \tag{4.1}$$

Аналогично для амплитуды $u(x)$ установившихся гармонических колебаний частоты ω получим краевую задачу

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] + \omega^2\rho(x)u(x) = -f(x), \quad u(0) = 0, \quad u(l) = 0. \tag{4.2}$$

Здесь $\rho(x)$ — плотность стержня. В случае задания величины смещения граничных сечений или задания действующих на граничные сечения внешних сил однородные граничные условия следует заменить на неоднородные условия вида

$$u(0) = u_0 \quad \text{или} \quad k(0)\frac{du}{dx}(0) = -\widetilde{f}(0). \tag{4.3}$$

К краевой задаче для системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}\Big(t, \boldsymbol{r}, \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\Big) \tag{4.4}$$

сводится задача определения траектории материальной точки массы m, выходящей в начальный момент t_0 из заданной точки $\boldsymbol{r}_0$ $(\boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{r}_0)$ и попадающей в момент t_1 в точку $\boldsymbol{r}_1$ $(\boldsymbol{r}(t_1) = \boldsymbol{r}_1)$.

В дальнейшем будут рассматриваться краевые задачи на отрезке $[0, l]$ оси x для линейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$y'' + g(x)y' + h(x)y = f_1(x), \tag{4.5}$$

где $g(x), h(x), f_1(x)$ — непрерывные функции на $[0, l]$. Введем функцию

$$p(x) = e^{\int\limits_{x_0}^{x} g(\xi)\, d\xi} \tag{4.6}$$

и заметим, что

$$p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)g(x)\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\Big[p(x)\frac{dy}{dx}\Big]. \tag{4.7}$$

Умножая (4.5) на $p(x)$ (очевидно, $p(x) \neq 0$ на $[0, l]$), получим

$$L[y] \equiv \frac{d}{dx}\Big[p(x)\frac{dy}{dx}\Big] - q(x)y(x) = f(x), \tag{4.8}$$

где $q(x) = -p(x)h(x)$, $f(x) = p(x)f_1(x)$, а через $L[y]$ мы обозначали дифференциальный оператор в левой части (4.8). Из проведенных рассмотрений следует, что без ограничения общности рассмотрение краевых задач для общего линейного дифференциального уравнения второго порядка (4.5) может быть сведено к изучению краевых задач для уравнения (4.8).

Краевые задачи для уравнения (4.8), как правило, рассматриваются с линейными граничными условиями вида*)

$$\begin{aligned} \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) &= u_0, \\ \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) &= u_l, \end{aligned} \tag{4.9}$$

*)В (4.9) предполагаются односторонние производные.

где α_i, β_i $(i = 1, 2)$, u_0, u_l — заданные числа, некоторые из них могут быть равны нулю, причем $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0$ $(i = 1, 2)$. Если $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2)$, то соответствующее граничное условие обычно называется условием *первого рода*; если $\beta_i = 0$ $(i = 1, 2)$ — условием *второго рода*, если α_i и β_i одновременно отличны от нуля — условием *третьего рода.*

Краевые задачи, в которых правая часть уравнения не равна нулю, будем называть *неоднородными* краевыми задачами. Рассмотрению этих задач посвящен § 2 настоящей главы.

Краевые задачи для однородного уравнения с однородными граничными условиями будем называть *однородными* краевыми задачами.

Очевидно, что однородная краевая задача, например, задача

$$L[y] = 0, \quad 0 < x < l, \quad y(0) = 0, \quad y(l) = 0, \tag{4.10}$$

всегда имеет тождественно равное нулю, так называемое *тривиальное* решение $y(x) \equiv 0$. Может оказаться, что других решений задача не имеет. Это означает, что, решая на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ начальную задачу для уравнения $L[y] = 0$ с начальными условиями $y(0) = 0$, $y'(0) = y_1$ (в силу теоремы существования решения начальной задачи — теорема 3.1 — такое решение существует и при $y_1 \neq 0$ не равно тождественно нулю), мы при всевозможных значениях $y_1 \neq 0$ получим функцию $y(x, y_1)$, обладающую тем свойством, что $y(l, y_1) \neq 0$. Аналогичное положение будет и при задании соответствующих начальных условий на правом конце отрезка и построении интегральных кривых справа налево. Например, задача

$$y''(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = y(1) = 0$$

имеет только тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

Если же при некотором значении $\bar{y}_1 \neq 0$ построенное указанным способом решение $y(x, \bar{y}_1)$ начальной задачи при $x = l$ удовлетворяет второму граничному условию $y(l, \bar{y}_1) = 0$, то это означает, что данная однородная краевая задача помимо тривиального имеет еще и не равное тождественно нулю решение. Такое решение однородной краевой задачи будем называть *нетривиальным.* Отметим, что в силу линейности задачи в этом случае и функция $Cy(x, \bar{y}_1)$ при любом значении постоянной $C \neq 0$ является нетривиальным решением данной однородной задачи. Например, задача

$$y'' + y = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad y(0) = y(\pi) = 0,$$

как легко проверить, помимо тривиального решения $y(x) \equiv 0$ имеет и нетривиальное решение $y(x) = C \sin x$.

Приведенные рассуждения справедливы и в случае более общих граничных условий (4.9).

Важным случаем однородных краевых задач являются так называемые *задачи на собственные значения*, состоящие в определении значений параметров, входящих в дифференциальное уравнение, при которых существуют нетривиальные решения однородной краевой задачи.

Типичной задачей на собственные значения для линейного дифференциального уравнения второго порядка является задача определения значений параметра λ, при которых существуют нетривиальные на $[0, l]$ решения задачи

$$\begin{gathered} L[y] + \lambda\rho(x)y(x) = 0, \\ \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0, \quad \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0, \end{gathered} \tag{4.11}$$

где $L[y]$ — тот же дифференциальный оператор, что в (4.8), $\rho(x)$ — заданная функция, непрерывная на $[0, l]$, а α_i, β_i $(i = 1, 2)$ — заданные постоянные, часть которых может быть равна нулю.

К задаче на собственные значения (4.11) сводятся, в частности, задачи определения собственных колебаний материальных систем с распределенными характеристиками — поперечные колебания струны, продольные колебания упругого стержня, звуковые колебания в трубах, электрические колебания в проводах и т. д. Пусть, например, в задаче о гармонических колебаниях упругого стержня (4.2) правая часть равна нулю, т. е. внешняя сила отсутствует, а ω является параметром. Требуется выяснить, возможны ли гармонические колебания некоторой частоты ω в отсутствие внешней силы (такие колебания называются *собственными колебаниями*), т. е. существуют ли такие значения ω, при которых имеются нетривиальные решения однородной ($f(x) = 0$) задачи (4.2).

Значения параметра λ, при которых задача (4.11) имеет нетривиальные решения, называются *собственными значениями*, а соответствующие им нетривиальные решения — *собственными функциями* краевой задачи на собственные значения.

Замечания.

1. Не ограничивая общности, неоднородную краевую задачу можно рассматривать с однородными граничными условиями. Действительно, в случае неоднородных граничных условий решение задачи можно искать в виде

$$y(x) = Y(x) + z(x), \tag{4.12}$$

где функция $Y(x)$ удовлетворяет лишь заданным граничным условиям, а в остальном произвольна. Очевидно, такую функцию всегда можно построить. Например, в случае граничных условий первого рода $y(0) = u_0$, $y(l) = u_l$ в качестве функции $Y(x)$ можно выбрать линейную функцию

$$Y(x) = u_0 \frac{l-x}{l} + u_l \frac{x}{l}. \tag{4.13}$$

Тогда для функции $z(x)$ получим неоднородную краевую задачу с несколько измененной правой частью, но однородными граничными условиями.

2. В общем случае для уравнения n-то порядка приходится рассматривать краевые задачи с граничными условиями более общего вида

$$P_i\big(y(0), \ldots, y^{(n-1)}(0), y(l), \ldots, y^{(n-1)}(l)\big) = 0, \tag{4.14}$$

где n — порядок уравнения, а $P_i(\cdot)$ — заданные функции от значений решения и его производных в граничных точках. Например, условиям типа (4.14) удовлетворяет задача определения периодических решений, в которой дополнительные условия имеют вид

$$y(0) = y(l), \quad y'(0) = y'(l), \ \ldots, \ y^{(n-1)}(0) = y^{(n-1)}(l). \tag{4.15}$$

Отметим важные для дальнейшего свойства решений уравнения (4.8). Пусть $y(x)$ и $z(x)$ удовлетворяют уравнениям

$$L[y] = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)y = f(x) \tag{4.16}$$

и

$$L[z] = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dz}{dx}\right] - q(x)z = g(x). \tag{4.17}$$

Умножая (4.16) на $z(x)$, (4.17) на $y(x)$ и вычитая почленно, получим

$$z(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - y(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dz}{dx}\right] = f(x)z(x) - g(x)y(x). \tag{4.18}$$

Так как

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\left(z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx}\right)\right] =$$
$$= z\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - y\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dz}{dx}\right] + p(x)\left[\frac{dz}{dx}\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}\right],$$

то (4.18) может быть записано в виде

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\left(z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx}\right)\right] = f(x)z(x) - g(x)y(x). \tag{4.19}$$

Это соотношение носит название *тождества Лагранжа*. Его интегральная форма называется *формулой Грина*:

$$\int_0^l \big(zL[y] - yL[z]\big)\,dx = \left\{p(x)\left(z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx}\right)\right\}\Big|_0^l = \\ = \int_0^l \big(f(x)z(x) - g(x)y(x)\big)\,dx. \quad (4.20)$$

Из формулы (4.19) следует, что если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два линейно независимых решения однородного уравнения ($f(x) \equiv g(x) \equiv 0$)

$$L[y] = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)y = 0, \quad (4.21)$$

то они удовлетворяют соотношению

$$p(x)\left[y_1\frac{dy_2}{dx} - y_2\frac{dy_1}{dx}\right] = C,$$

откуда следует, что определитель Вронского этих решений имеет вид

$$\Delta(y_1, y_2) = \frac{C}{p(x)}. \quad (4.22)$$

Замечания.

1. Поскольку решения однородного уравнения определены с точностью до произвольного множителя, константу C в (4.22) можно определить, лишь выбрав множители у решений, т. е. проведя так называемую *нормировку решений*.

2. Из соотношения (4.22) следует, что если известно какое-либо решение $y_1(x)$ однородного уравнения, то любое линейно независимое с ним решение $y(x)$ этого уравнения удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению первого порядка

$$y_1(x)\frac{dy}{dx} - \frac{dy_1}{dx}y(x) = \frac{C}{p(x)}. \quad (4.23)$$

Если $y_1(x) \neq 0$ на $[0, l]$, то, поделив (4.23) на $y_1^2(x)$, получим

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y(x)}{y_1(x)}\right) = \frac{C}{p(x)y_1^2(x)}, \quad (4.24)$$

что позволяет записать общее решение (4.23) в виде

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C y_1(x)\int_0^x \frac{d\xi}{p(\xi)y_1^2(\xi)}. \quad (4.25)$$

§ 2. Неоднородная краевая задача

Рассмотрим краевую задачу

$$
\begin{gathered}
L[y] = f(x), \\
\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0, \quad \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0.
\end{gathered}
\tag{4.26}
$$

Пусть функция $p(x) > 0$ положительна и непрерывно дифференцируема на $[0, l]$, а действительные функции $q(x)$ и $f(x)$ непрерывны на $[0, l]$. Решением краевой задачи (4.26) будем называть непрерывно дифференцируемую на $[0, l]$ функцию $y(x)$ с непрерывной второй производной на $(0, l)$, удовлетворяющую на $(0, l)$ уравнению и граничным условиям (4.26). В начале наших рассмотрений будем предполагать, что соответствующая однородная краевая задача имеет только тривиальные решения. Другими словами, мы предполагаем, что $\lambda = 0$ не является собственным значением соответствующей задачи (4.11).

Отметим сразу, что в силу линейности задачи (4.26) из этого предположения следует, что *если решение данной задачи существует, то оно единственно.*

Наша ближайшая цель заключается в доказательстве существования решения задачи (4.26) при сделанных предположениях о коэффициентах и правой части уравнения. При этом доказательство существования решения будет одновременно содержать и алгоритм его конструктивного построения.

Начнем с наводящих соображений. Предположим, что существует решение задачи (4.26) при специальном способе задания правой части уравнения, а именно, при функции $f(x)$, отличной от нуля лишь в ε-окрестности некоторой фиксированной точки $x = \xi \in (0, l)$:

$$
f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant \xi - \varepsilon, \\ f_\varepsilon(x), & \xi - \varepsilon \leqslant x \leqslant \xi + \varepsilon, \\ 0, & x \geqslant \xi + \varepsilon, \end{cases}
\tag{4.27}
$$

причем функция $f_\varepsilon(x) \geqslant 0$ и

$$
\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} f_\varepsilon(x)\, dx = 1.
\tag{4.28}
$$

Решение этой задачи будем обозначать функцией $y_\varepsilon(x, \xi)$.

Интегрируя уравнение (4.26) с так заданной функцией $f(x)$ по отрезку $[\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon]$, получим

$$p(\xi+\varepsilon)y'_\varepsilon(\xi+\varepsilon,\xi) - p(\xi-\varepsilon)y'_\varepsilon(\xi-\varepsilon,\xi) - \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} q(x)y_\varepsilon(x,\xi)\,dx =$$
$$= \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} f_\varepsilon(x)\,dx = 1. \tag{4.29}$$

Рассмотрим теперь предельный процесс при $\varepsilon \to 0$, предполагая, что (4.29) справедливо при любом ε и, следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} f_\varepsilon(x)\,dx = 1. \tag{4.30}$$

Будем предполагать, что предельная функция

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon(x,\xi) = G(x,\xi) \tag{4.31}$$

существует и непрерывна на $[0,l]$. Тогда, совершая предельный переход при $\varepsilon \to 0$ в (4.29), получим, что производная $\frac{d}{dx}G(x,\xi)$ в точке $x=\xi$ должна иметь разрыв первого рода, причем разность правого и левого предельного значений этой производной в точке $x=\xi$ определяется выражением

$$\frac{d}{dx}G(x,\xi)\bigg|_{x=\xi+0} - \frac{d}{dx}G(x,\xi)\bigg|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p(\xi)}. \tag{4.32}$$

Подводя итог проведенным рассмотрениям, мы можем утверждать, что если функция $G(x,\xi)$ существует, то она подчиняется следующим условиям:

1) $G(x,\xi)$ как функция переменной x удовлетворяет однородному уравнению (4.26) при $0<x<\xi$ и $\xi<x<l$;

2) $G(x,\xi)$ удовлетворяет граничным условиям (4.26);

3) $G(x,\xi)$ непрерывна на $[0,l]$, а ее первая производная имеет в точке $x=\xi$ разрыв первого рода с величиной скачка предельных значений, равной

$$\frac{d}{dx}G(x,\xi)\bigg|_{\xi-0}^{\xi+0} = \frac{1}{p(\xi)}. \tag{4.32$'$}$$

Функцию, удовлетворяющую условиям 1), 2), 3), назовем *функцией Грина краевой задачи* (4.26). Существенное значение функции Грина заключается, в частности, в том, что *через нее может быть* *выражено решение краевой задачи* (4.26) с произвольной правой частью $f(x)$.

Действительно, пусть существуют решение задачи (4.26) и функция Грина $G(x,\xi)$. Применяя формулу Грина (4.20) к этим функциям на отрезках $[0,\xi-\varepsilon]$ и $[\xi+\varepsilon,l]$, где функции $y(x)$ и $G(x,\xi)$ непрерывно дифференцируемы и обладают вторыми непрерывными производными, получим

$$\left\{p(x)\left(G(x,\xi)\frac{dy}{dx}-y(x)\frac{dG}{dx}\right)\right\}\Bigg|_0^{\xi-\varepsilon}+\left\{p(x)\left(G(x,\xi)\frac{dy}{dx}-y(x)\frac{dG}{dx}\right)\right\}\Bigg|_{\xi+\varepsilon}^{l}= \\ =\int\limits_0^{\xi+\varepsilon}G(x,\xi)f(x)\,dx+\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{l}G(x,\xi)f(x)\,dx. \tag{4.33}$$

Так как и $y(x)$ и $G(x,\xi)$ удовлетворяют однородным граничным условиям (4.26), то подстановки при $x=0$ и $x=l$ обращаются в нуль. Переходя в (4.33) к пределу при $\varepsilon\to 0$, в силу определения функции Грина получим

$$y(\xi)=\int\limits_0^l G(x,\xi)f(x)\,dx, \tag{4.34}$$

что и доказывает высказанное утверждение.

Покажем теперь, что *функция Грина краевой задачи* (4.26) *существует*, и дадим алгоритм ее построения. Построим функцию $y_1(x)$, являющуюся решением однородного уравнения (4.26), удовлетворяющим левому краевому условию

$$\alpha_1 y_1'(0)+\beta_1 y_1(0)=0. \tag{4.35}$$

Очевидно, в силу сделанных предположений о коэффициентах уравнения функция $y_1(x)$ всегда может быть построена как решение начальной задачи для уравнения (4.26) с начальными условиями

$$y_1(0)=-C\alpha_1,\quad y_1'(0)=C\beta_1, \tag{4.36}$$

где C — произвольная постоянная. В случае сделанного предположения о существовании лишь тривиальных решений однородной краевой задачи построенная таким образом функция $y_1(x)$ не удовлетворяет правому граничному условию

$$\alpha_2 y_1'(l)+\beta_2 y_1(l)\neq 0. \tag{4.37}$$

Аналогичным образом построим функцию $y_2(x)$, являющуюся решением однородного уравнения, удовлетворяющим правому граничному условию

$$\alpha_2 y_2'(l)+\beta_2 y_2(l)=0. \tag{4.38}$$

Легко видеть, что построенные указанным образом функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы. Действительно, предполагая линейную зависимость функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, например,

$$y_1(x) = Cy_2(x), \tag{4.39}$$

получим, что $y_1(x)$ удовлетворяет правому граничному условию, что противоречит (4.37). Итак, мы построили два линейно независимых решения однородного уравнения (4.26), каждое из которых удовлетворяет только одному из двух однородных граничных условий.

Будем искать функцию $G(x, \xi)$ в виде

$$G(x,\xi) = \begin{cases} C_1 y_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ C_2 y_2(x), & \xi \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{4.40}$$

Ясно, что при этом функция (4.40) удовлетворяет однородному уравнению (4.26) при $x \neq \xi$ и однородным граничным условиям. Для того чтобы удовлетворить условиям непрерывности функции $G(x, \xi)$ и скачка ее производной (4.32), остается найти постоянные C_1 и C_2 из соотношений

$$C_2 y_2(\xi) - C_1 y_1(\xi) = 0, \quad C_2 y_2'(\xi) - C_1 y_1'(\xi) = 1/p(\xi). \tag{4.41}$$

Определитель этой линейной алгебраической системы, представляющий собой определитель Вронского линейно независимых решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$, отличен от нуля и в силу (4.22)

$$\Delta(y_1, y_2) = C/p(x),$$

где постоянная C определяется нормировкой решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Отсюда следует, что система (4.41) разрешима единственным образом. Подставив полученные значения C_1 и C_2 в (4.40), получим окончательное выражение функции Грина краевой задачи (4.26):

$$G(x,\xi) = \frac{1}{C}\begin{cases} y_2(\xi) y_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ y_1(\xi) y_2(x), & \xi \leqslant x \leqslant l, \end{cases} \tag{4.42}$$

где постоянная

$$C = p(\xi)\Delta(y_1(\xi), y_2(\xi)). \tag{4.43}$$

Проведенные рассуждения являются доказательством существования и единственности функции Грина краевой задачи (4.26) в случае, когда соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение.

Замечания. 1. Из явного выражения функции Грина (4.42) следует, что она является *симметричной функцией* своих аргументов:

$$G(x,\xi) = G(\xi, x). \tag{4.44}$$

2. Как следует из наводящих соображений, предшествовавших построению функции Грина, она имеет простой физический смысл, представляя собой решение краевой задачи в случае сосредоточенной нагрузки.

Пример 4.1. В качестве простейшего примера рассмотрим построение функции Грина краевой задачи

$$y'' = f(x), \quad 0 < x < l, \quad y(0) = 0, \quad y'(l) = 0.$$

Легко проверить непосредственно, что соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение. В качестве функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, удовлетворяющих соответственно левому и правому граничному условию, выберем $y_1(x) = x$ и $y_2(x) = 1$. Согласно (4.40) ищем функцию Грина рассматриваемой задачи в виде

$$G(x,\xi) = \begin{cases} C_1 x, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ C_2, & \xi \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Удовлетворяя условию непрерывности функции $G(x,\xi)$ при $x = \xi$ и условию на величину скачка ее производной в этой точке, получим $C_1\xi = C_2$, $-C_1 = 1$. Отсюда $C_1 = -1$, $C_2 = -\xi$, и окончательно выражение функции Грина рассматриваемой задачи принимает вид

$$G(x,\xi) = -\begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \xi, & \xi \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Отметим, что в силу (4.1) построенная функция Грина определяет форму статического равновесия под действием внешней продольной сосредоточенной силы однородного упругого стержня, левый конец которого жестко закреплен, а правый свободен. Функция Грина $G(x,\xi)$ выражает величину смещения сечения x, если в точке ξ приложена сосредоточенная сила, сжимающая стержень. Как видно из выражения для $G(x,\xi)$ при данных условиях смещение сечений стержня, расположенных левее точки приложения силы ($x \leqslant \xi$), будет неравномерным и тем бо́льшим, чем ближе данное сечение к точке ξ приложения силы, а вся часть стержня, находящаяся правее точки приложения силы, переместится как целое.

Перейдем теперь к вопросу о существовании решений исходной краевой задачи. Имеет место следующая

Теорема 4.1. *Если однородная краевая задача* (4.26) *имеет только тривиальное решение, то решение неоднородной краевой задачи существует для любой непрерывной на* $[0,l]$ *функции* $f(x)$ *и*

$$y(x) = \int_0^l G(x,\xi) f(\xi)\, d\xi. \tag{4.45}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно непосредственной проверкой убедиться, что функция $y(x)$, заданная формулой (4.45), удовлетворяет всем условиям определения решения краевой задачи (4.26).

Действительно, запишем формулу (4.45) в виде

$$y(x) = \int_0^x G_1(x,\xi) f(\xi)\, d\xi + \int_x^l G_2(x,\xi) f(\xi)\, d\xi,$$

где $G_1(x,\xi) = \frac{1}{C} y_1(\xi) y_2(x)$, $G_2(x,\xi) = \frac{1}{C} y_2(\xi) y_1(x)$ являются непрерывными функциями x и ξ вместе с производными до второго порядка, причем условие непрерывности $G(x,\xi)$ в точке $x = \xi$ можно записать в виде $G_1(\xi,\xi) = G_2(\xi,\xi)$ или

$$G_1(x,x) = G_2(x,x),$$

а условие скачка производной (4.32) — в виде

$$G'_{1x}(x,x) - G'_{2x}(x,x) = 1/p(x).$$

Пользуясь этими соотношениями между G_1 и G_2, получим в результате дифференцирования интегралов по известным правилам [17]:

$$\begin{gathered} y'(x) = G_1(x,x) f(x) + \int_0^x G'_{1x}(x,\xi) f(\xi)\, d\xi - G_2(x,x) f(x) + \\ + \int_x^l G'_{2x}(x,\xi) f(\xi)\, d\xi = \int_0^x G'_{1x}(x,\xi) f(\xi)\, d\xi + \int_x^l G'_{2x}(x,\xi) f(\xi)\, d\xi, \\ y''(x) = G'_{1x}(x,x) f(x) + \int_0^x G''_{1xx}(x,\xi) f(\xi)\, d\xi - \\ - G'_{2x}(x,x) f(x) + \int_x^l G''_{2xx}(x,\xi) f(\xi)\, d\xi = \\ = \frac{f(x)}{p(x)} + \int_0^x G''_{1xx}(x,\xi) f(\xi)\, d\xi + \int_x^l G''_{2xx}(x,\xi) f(\xi)\, d\xi. \end{gathered}$$

Отсюда

$$L[y(x)] = py'' + p'y' - qy = \int_0^x L[G_1] f(\xi)\, d\xi + \int_x^l L[G_2] f(\xi)\, d\xi + f(x) = f(x),$$

что и доказывает утверждение теоремы.

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда однородная краевая задача (4.26) имеет нетривиальное решение. Для упрощения последующих выкладок будем рассматривать краевую задачу с граничными условиями первого рода:

$$L[y] = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(l) = 0. \tag{4.46}$$

По условию существует функция $\varphi_0(x)$, являющаяся решением соответствующей однородной краевой задачи

$$L[\varphi_0(x)] = 0, \quad \varphi_0(0) = 0, \quad \varphi_0(l) = 0. \tag{4.47}$$

Функцию $\varphi_0(x)$ можно рассматривать как собственную функцию задачи на собственные значения (4.11), где $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, соответствующую собственному значению $\lambda = 0$. Очевидно, что однородная краевая задача (4.47) не имеет других решений, линейно независимых с $\varphi_0(x)$. Функцию $\varphi_0(x)$ нормируем так, что

$$\int_0^l \varphi_0^2(x)\,dx = 1. \tag{4.48}$$

Отметим сразу, что если решение $y(x)$ краевой задачи (4.46) существует, то правая часть уравнения, функция $f(x)$, должна быть ортогональна на $[0, l]$ функции $\varphi_0(x)$. Действительно, применив формулу Грина (4.20) к функциям $y(x)$ и $\varphi_0(x)$, получим

$$\int_0^l \bigl(\varphi_0(x)L[y] - y(x)L[\varphi_0]\bigr)\,dx = \int_0^l \varphi_0(x)f(x)\,dx =$$
$$= \bigl\{p(x)\bigl(\varphi_0(x)y'(x) - y(x)\varphi_0'(x)\bigr)\bigr\}\big|_0^l = 0, \tag{4.49}$$

откуда и следует наше утверждение.

Другими словами, справедлива следующая

Лемма 4.1. *Необходимым условием разрешимости краевой задачи* (4.46) *является условие ортогональности правой части уравнения* (4.46) *нетривиальному решению соответствующей однородной краевой задачи* (4.47).

В дальнейшем будем считать, что необходимое условие разрешимости краевой задачи (4.46) выполнено. Покажем, что в этом случае решение краевой задачи существует и может быть построено с помощью соответствующим образом определенной функции Грина. Заметим, что если функция $y(x)$ является решением краевой задачи (4.46), то любая функция $\widetilde{y}(x)$ вида

$$\widetilde{y}(x) = y(x) + C\varphi_0(x), \tag{4.50}$$

где C — произвольная постоянная, является решением той же задачи, поскольку функция $\varphi_0(x)$ — решение соответствующей однородной задачи. Поэтому чтобы определить единственное решение краевой задачи, его надо подчинить дополнительному условию. В качестве такового поставим условие ортогональности искомого решения собственной функции $\varphi_0(x)$:

$$\int_0^l y(x)\varphi_0(x)\,dx = 0. \tag{4.51}$$

Покажем, что задача (4.46), (4.51) может иметь только одно решение. Очевидно, что в силу линейности задачи для этого достаточно показать, что соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение.

Лемма 4.2. *Однородная задача* (4.47), (4.51) *имеет только тривиальное решение.*

Доказательство. По условию все решения однородной задачи (4.47) представимы в виде $y_0(x) = C\varphi_0(x)$. Условие (4.51) дает

$$\int\limits_0^l y_0(x)\varphi_0(x)\,dx = C\int\limits_0^l \varphi_0^2(x)\,dx = 0,$$

откуда $C = 0$, и лемма доказана.

Перейдем к построению так называемой *обобщенной функции Грина задачи* (4.46), (4.51). Так как существует нетривиальное решение однородной краевой задачи (4.47), то для построения нужной нам функции Грина ограничиться только решениями однородного уравнения нельзя. Поэтому определим обобщенную функцию Грина $G(x,\xi)$ как решение следующей задачи:

1. $G(x,\xi)$ удовлетворяет неоднородному уравнению

$$L_x[G(x,\xi)] = -\varphi_0(\xi)\varphi_0(x) \tag{4.52}$$

при $0 < x < \xi$ и $\xi < x < l$.

2. $G(x,\xi)$ удовлетворяет тем же граничным условиям, что и искомое решение

$$G(0,\xi) = G(l,\xi) = 0. \tag{4.53}$$

3. $G(x,\xi)$ непрерывна на $[0,l]$.

4. Первая производная $\frac{d}{dx}G(x,\xi)$ имеет разрыв первого рода при $x = \xi$, причем величина скачка равна

$$\frac{d}{dx}G(x,\xi)\Big|_{\xi-0}^{\xi+0} = \frac{1}{p(\xi)}. \tag{4.54}$$

5. $G(x,\xi)$ ортогональна на $[0,l]$ собственной функции $\varphi_0(x)$:

$$\int\limits_0^l G(x,\xi)\varphi_0(x)\,dx = 0. \tag{4.55}$$

Покажем сразу, что если решение исходной краевой задачи (4.46), (4.51) и обобщенная функция Грина существуют, то решение задачи

(4.46), (4.51) выражается через обобщенную функцию Грина по формуле, аналогичной (4.34). Действительно, применяя формулу Грина к функциям $y(x)$ и $G(x,\xi)$ на $[0,\xi-\varepsilon]$ и $[\xi+\varepsilon,l]$ и переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, аналогично предыдущему получим

$$p(\xi)y(\xi)\frac{dG}{dx}\bigg|_{x=\xi-0}^{x=\xi+0} = \int_0^l \bigl\{G(x,\xi)f(x)+y(x)\varphi_0(\xi)\varphi_0(x)\bigr\}\,dx,$$

что в силу условий (4.54) и (4.51) окончательно дает

$$y(\xi) = \int_0^l G(x,\xi)f(x)\,dx. \tag{4.57}$$

Мы укажем алгоритм явного построения определенной условиями 1–5 обобщенной функции Грина. Тем самым будет проведено и конструктивное доказательство ее существования.

Выберем какое-либо частное решение $\omega(x)$ неоднородного уравнения

$$L[\omega(x)] = -\varphi_0(\xi)\varphi_0(x) \tag{4.58}$$

на $(0,l)$ (например, решение начальной задачи для уравнения (4.58) с начальными условиями $\omega(0)=\alpha$, $\omega'(0)=\beta$).

Наряду с функцией $\varphi_0(x)$ рассмотрим линейно независимое с ним решение $\varphi_1(x)$ однородного уравнения (4.47):

$$L[\varphi_1(x)] = 0, \tag{4.59}$$

причем будем считать, что $\varphi_1(x)$ нормировано так, что

$$\Delta(\varphi_1(x),\varphi_0(x)) = 1/p(x). \tag{4.60}$$

Отметим сразу, что в силу линейной независимости функций $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ функция $\varphi_1(x)$ не может удовлетворять тем же однородным граничным условиям, что и $\varphi_0(x)$:

$$\varphi_1(0)\neq 0,\quad \varphi_1(l)\neq 0. \tag{4.61}$$

Выбранное частное решение $\omega(x)$, вообще говоря, также не удовлетворяет однородным граничным условиям (4.53). Однако можно так выбрать линейные комбинации функций $\omega(x)$ и $\varphi_1(x)$ на отрезках $[0,\xi]$ и $[\xi,l]$, чтобы удовлетворить условиям (4.53). Но при этом не остается достаточных степеней свободы для того, чтобы удовлетворить остающимся условиям 3–5. Это можно сделать, добавив линейно независимое с φ_1 решение однородного уравнения — функцию φ_0, которая, удовлетворяя однородным условиям (4.53), не может их испортить. Поэтому обобщенную функцию Грина будем строить в виде

$$G(x,\xi) = \omega(x) + \begin{cases} C_1\varphi_1(x) + C_3\varphi_0(x), & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ C_2\varphi_1(x) + C_4\varphi_0(x), & \xi \leqslant x \leqslant l, \end{cases} \tag{4.62}$$

подбирая постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 так, чтобы удовлетворить всем условиям. Условия (4.53) дают

$$\omega(0) + C_1\varphi_1(0) = 0, \quad \omega(l) + C_2\varphi_1(l) = 0. \tag{4.63}$$

В силу (4.61) отсюда однозначно определяются постоянные C_1 и C_2. Условия непрерывности функции $G(x,\xi)$ и скачка ее производной при $x = \xi$ приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} &(C_2 - C_1)\varphi_1(\xi) + (C_4 - C_3)\varphi_0(\xi) = 0, \\ &(C_2 - C_1)\varphi_1'(\xi) + (C_4 - C_3)\varphi_0'(\xi) = 1/p(\xi). \end{aligned} \tag{4.64}$$

В силу (4.60) эта система однозначно разрешима относительно $C_2 - C_1$ и $C_4 - C_3$:

$$C_2 - C_1 = -\varphi_0(\xi), \quad C_4 - C_3 = \varphi_1(\xi). \tag{4.65}$$

Значения C_2 и C_1 были уже найдены из (4.63). Покажем, что они удовлетворяют (4.65). Применим формулу Грина к функциям $\omega(x)$ и $\varphi_0(x)$:

$$\int\limits_0^l \bigl(\varphi_0(x)L[\omega] - \omega(x)L[\varphi_0]\bigr)\,dx =$$

$$= \bigl\{p(x)\bigl(\varphi_0(x)\omega'(x) - \omega(x)\varphi_0'(x)\bigr)\bigr\}\Big|_0^l = -\int\limits_0^l \varphi_0(x)\varphi_0(\xi)\varphi_0(x)\,dx;$$

получим

$$-p(l)\omega(l)\varphi_0'(l) + p(0)\omega(0)\varphi_0'(0) = -\varphi_0(\xi). \tag{4.66}$$

Но в силу (4.60)

$$p(l)\varphi_0'(l) = 1/\varphi_1(l), \quad p(0)\varphi_0'(0) = 1/\varphi_1(0), \tag{4.67}$$

и на основании (4.63) формула (4.66) переходит в выражение $C_2 - C_1 = -\varphi_0(\xi)$, совпадающее с (4.65). Итак, C_1 и C_2 определены однозначно. Выразим C_4 через C_3 из (4.65), получим

$$C_4 = C_3 + \varphi_1(\xi), \tag{4.68}$$

и перепишем (4.62) в виде

$$G(x,\xi) = \omega(x) + C_3\varphi_0(x) + \begin{cases} C_1\varphi_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ C_2\varphi_1(x) + \varphi_1(\xi)\varphi_0(x), & \xi \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{4.69}$$

Здесь остается неизвестным лишь коэффициент C_3. Подставляя (4.69) в условие (4.55), получим для определения коэффициента C_3 выражение

$$C_3 \int_0^l \varphi_0^2(x)\,dx = C_3 = -\left\{ \int_0^l \omega(x)\varphi_0(x)\,dx + C_1 \int_0^\xi \varphi_1(x)\varphi_0(x)\,dx + \right.$$
$$\left. + C_2 \int_\xi^l \varphi_1(x)\varphi_0(x)\,dx + \varphi_1(\xi) \int_\xi^l \varphi_0^2(x)\,dx \right\}. \tag{4.70}$$

Коэффициент C_4 выражается через C_3 по формуле (4.68). Итак, обобщенная функция Грина построена.

Проведенные рассуждения позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 4.2. *Необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости краевой задачи* (4.46), (4.51) *является условие* (4.49) *ортогональности правой части $f(x)$ уравнения* (4.46) *собственной функции $\varphi_0(x)$. При этом решение выражается в виде*

$$y(x) = \int_0^l G(x,\xi) f(\xi)\,d\xi. \tag{4.71}$$

Доказательство. Необходимость условия ортогональности (4.49) и единственность решения краевой задачи были доказаны ранее (см. леммы 4.1 и 4.2); доказательство того, что функция $y(x)$, определенная формулой (4.71), при выполнении условия (4.49) является решением краевой задачи, может быть проведено путем непосредственной проверки.

Замечания.

1. Для упрощения выкладок рассматривалась краевая задача с граничными условиями первого рода. Аналогичные рассмотрения и построение обобщенной функции Грина могут быть проведены и в случае общих граничных условий.

2. Мы предполагаем, что однородная краевая задача имеет лишь одно линейно независимое решение $\varphi_0(x)$. Соответствующие рассмотрения могут быть проведены и в том случае, когда задача имеет два

линейно независимых решения $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ (число линейно независимых решений, очевидно, не более двух, так как порядок уравнения равен двум). При этом собственному значению $\lambda = 0$ краевой задачи на собственные значения (4.11) отвечают две линейно независимые собственные функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$.

Для разрешимости неоднородной краевой задачи в этом случае должны выполняться условия ортогональности правой части уравнения обеим собственным функциям:

$$\int\limits_0^l f(x)\varphi_i(x)\,dx = 0, \quad i = 1, 2. \tag{4.72}$$

Для того чтобы имела место единственность, решение краевой задачи надо подчинить аналогичным условиям ортогональности всем собственным функциям, а обобщенную функцию Грина строить как решение неоднородного уравнения, в правой части которого выбирается линейная комбинация собственных функций.

П р и м е р 4.2. Рассмотрим краевую задачу

$$y'' + y = f(x), \quad 0 < x < \pi, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

Как легко видеть, соответствующая однородная краевая задача имеет нетривиальное решение $\varphi_0(x) = \sqrt{2/\pi}\sin x$ (коэффициент $\sqrt{2/\pi}$ выбран из условия нормировки (4.48)). Поэтому решение неоднородной краевой задачи существует лишь тогда, когда правая часть $f(x)$ удовлетворяет условию ортогональности (4.49):

$$\int\limits_0^\pi f(x)\sin x\,dx = 0,$$

и для того, чтобы это решение представить по формуле (4.57), нужна обобщенная функция Грина.

Перейдем к ее построению. Найдем частное решение $\omega(x)$ уравнения

$$\omega'' + \omega = -\frac{2}{\pi}\sin\xi\sin x.$$

Будем искать его в виде $\omega = Ax\cos x$. Непосредственной подстановкой в уравнение найдем значение постоянной $A = \frac{1}{\pi}\sin\xi$ и получим

$$\omega(x) = \frac{1}{\pi}(\sin\xi)x\cos x.$$

В качестве частного решения однородного уравнения, не удовлетворяющего заданным граничным условиям, выберем функцию $\varphi_1(x) = \cos x$.

Согласно (4.62) обобщенную функцию Грина рассматриваемой задачи следует искать в виде

$$G(x,\xi) = \frac{1}{\pi}(\sin\xi)x\cos x + \begin{cases} C_1\cos x + C_3\sin x, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ C_2\cos x + C_4\sin x, & \xi \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Требование удовлетворения граничным условиям $G(0,\xi) = 0$, $G(\pi,\xi) = 0$ дают уравнения для определения постоянных C_1 и C_2:

$$C_1 = 0, \quad -\sin\xi - C_2 = 0, \quad \text{откуда} \quad C_1 = 0, \quad C_2 = -\sin\xi.$$

Условия непрерывности функции $G(x,\xi)$ при $x = \xi$ и скачка ее производной в этой точке с учетом найденных значений C_1 и C_2 приводят к уравнениям для постоянных C_3 и C_4:

$$C_3\sin\xi + \sin\xi\cos\xi - C_4\sin\xi = 0,$$
$$\sin^2\xi + C_4\cos\xi - C_3\cos\xi = 1,$$

откуда $C_4 = C_3 + \cos\xi$ и выражение для $G(x,\xi)$ принимает вид

$$G(x,\xi) = \frac{1}{\pi}(\sin\xi)x\cos x + \\ + C_3\sin x + \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ -\sin\xi\cos x + \cos\xi\sin x, & \xi \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Постоянную C_3 найдем из условия ортогональности функции $G(x,\xi)$ к функции $\varphi_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x$:

$$\int\limits_0^\pi G(x,\xi)\sin x\,dx = 0.$$

Вычисляя соответствующие интегралы, получим

$$C_3 = -\frac{\pi-\xi}{\pi}\cos\xi - \frac{1}{2\pi}\sin\xi,$$

что дает окончательное выражение обобщенной функции Грина рассматриваемой задачи в виде

$$G(x,\xi) = \frac{1}{\pi}(x\sin\xi\cos x + \xi\cos\xi\sin x) - \\ - \frac{1}{2\pi}\sin\xi\sin x - \begin{cases} \cos\xi\sin x, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \cos x\sin\xi, & \xi \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

С помощью найденного выражения обобщенной функции Грина и представления (4.57) легко получить решение неоднородной краевой задачи в том случае, когда правая часть $f(x)$ уравнения удовлетворяет условию ортогональности

$$\int\limits_0^\pi f(x)\varphi_0(x)\,dx = 0.$$

Зададим функцию $f(x)$ конкретно, а именно, положим $f(x) = \cos x$ и будем искать решение краевой задачи

$$y'' + y = \cos x, \quad 0 < x < \pi, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0,$$

ортогональное собственной функции $\sin x$, соответствующей однородной краевой задаче

$$\int\limits_0^\pi y(x) \sin x \, dx = 0.$$

Пользуясь только что полученным выражением обобщенной функции Грина и представлением (4.57), после несложных вычислений элементарных интегралов найдем

$$y(x) = \frac{x}{2} \sin x - \frac{\pi}{4} \sin x.$$

Легко проверить, что найденное решение удовлетворяет условию ортогональности собственной функции $\sin x$.

Отметим, что в силу уравнения (4.2) построенная обобщенная функция Грина определяет амплитуду установившихся гармонических колебаний закрепленного на концах однородного упругого стержня при внешнем воздействии специального вида. А именно, частота внешней силы — резонансная, т. е. совпадает с частотой собственных колебаний стержня, при которой амплитуда собственных колебаний стержня описывается функцией $\varphi_0(x)$. Однако пространственное распределение амплитуды внешней силы таково, что амплитуда вынужденных колебаний, не нарастая во времени, остается ограниченной. Это достигается выполнением условий ортогональности: и правая часть уравнения, а также обобщенная функция Грина, и само решение неоднородной краевой задачи ортогональны собственной функции $\varphi_0(x)$.

В данном примере обобщенная функция Грина $G(x, \xi)$ имеет физический смысл амплитуды y установившихся колебаний закрепленного на концах упругого стержня при периодическом внешнем воздействии с резонансной частотой, которое представляет собой сумму сосредоточенной силы, приложенной в точке ξ, и силы, распределенной по всему стержню с плотностью $\sin x$ и амплитудой $\frac{2}{\pi} \sin \xi$.

Заметим, наконец, что мы рассматривали идеализированный случай точного выполнения условий ортогональности амплитуды внешнего воздействия амплитуде собственных колебаний. В реальных задачах эти строгие условия, как правило, не выполняются, что может привести к очень большим амплитудам установившихся колебаний при частоте внешнего воздействия, близкой к резонансной, или к несуществованию решения рассматриваемой задачи об установившихся колебаниях. При этом следует иметь в виду, что в случае больших амплитуд рассматриваемая линейная математическая модель, достаточно адекватно описывающая малые колебания, уже не применима и должна быть заменена более сложной нелинейной моделью.

§ 3. Задачи на собственные значения

В § 1 была поставлена задача на собственные значения, заключающаяся в определении тех значений параметра λ, при которых на $[0, l]$ существуют нетривиальные решения однородного уравнения

$$L[y] + \lambda\rho(x)y(x) = 0, \tag{4.73}$$

удовлетворяющие однородным граничным условиям

$$\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0, \quad \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0. \tag{4.74}$$

Будем считать, что функция $\rho(x) > 0$ непрерывна на $[0, l]$, а в отношении коэффициентов, входящих в дифференциальный оператор L, выполнены те же требования, что и в § 2. При этом функция Грина краевой задачи (4.26) существует и является симметричной функцией своих аргументов.

Задачу на собственные значения, т. е. задачу отыскания нетривиальных решений однородного уравнения (4.73), удовлетворяющих однородным граничным условиям (4.74), часто называют *задачей Штурма–Лиувилля*, а сами нетривиальные решения — собственными функциями этой задачи.

Собственные функции задачи Штурма–Лиувилля обладают рядом замечательных свойств, которые широко используются не только при решении краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, но и при решении краевых задач для уравнений в частных производных, а также для решения многих других математических проблем. Большинство этих свойств можно проще всего доказать путем сведения краевой задачи (4.73), (4.74) к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с симметричным ядром. Однако изучение интегральных уравнений выходит за пределы материала настоящей книги (см., например, [12, 28]). Поэтому мы приведем здесь частично без доказательства основные свойства собственных значений и собственных функций краевой задачи

(4.73), (4.74). В конце параграфа будет дано свед́ение рассматриваемой краевой задачи к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

Имеют место следующие свойства собственных значений и собственных функций краевой задачи (4.73), (4.74):

1. *Существует бесконечное счетное множество* $\{\lambda_n\}$ *собственных значений и соответствующая им бесконечная последовательность* $\{y_n(x)\}$ *собственных функций. Все собственные значения можно занумеровать в порядке возрастания их абсолютной величины*

$$|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots \tag{4.75}$$

2. *Каждому собственному значению соответствует с точностью до постоянного множителя только одна собственная функция.* В этом смысле говорят, что *ранг* собственных значений равен единице.

Доказательство. Действительно, предположим, что одному собственному значению отвечают две линейно независимые собственные функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ (более двух не может быть, так как порядок уравнения равен двум). Из (4.74) следует $\alpha_1 y_i'(0)+\beta_1 y_i(0) = 0$ $(i = 1, 2)$. Отсюда $\Delta(y_1(0), y_2(0)) = 0$ и, следовательно, $y_1(x)$, $y_2(x)$ линейно зависимы.

Замечание. В случае более сложных краевых условий ранг собственного значения может быть равен двум (но не более двух, так как порядок уравнения равен двум). Собственные значения ранга 2 будут иметь место, в частности, при периодических граничных условиях. В качестве примера рассмотрим краевую задачу

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi). \tag{4.76}$$

Как легко видеть, собственные значения $\lambda_n = n^2$ этой задачи имеют ранг, равный двум. Каждому λ_n соответствуют две линейно независимые собственные функции

$$y_{n(1)}(x) = \sin nx, \quad y_{n(2)}(x) = \cos nx.$$

3. *В случае граничных условий* $y(0) = y(l) = 0$ *и при выполнении условия* $q(x) \geqslant 0$ *все собственные значения краевой задачи* (4.73), (4.74) *положительны:* $\lambda_n > 0$.

Для доказательства умножим уравнение для собственной функции $y_n(x)$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_n}{dx}\right] - q(x)y_n(x) + \lambda_n \rho(x) y_n(x) = 0 \tag{4.77}$$

на функцию $y_n(x)$ и проинтегрируем результат по $[0, l]$. Получим

$$\int_0^l \frac{d}{dx}\Big[p(x)\frac{dy_n}{dx}\Big]y_n(x)\,dx - \int_0^l q(x)y_n^2(x)\,dx + \lambda_n\int_0^l \rho(x)y_n^2(x)\,dx = 0. \tag{4.78}$$

Преобразуя первый интеграл интегрированием по частям, в силу граничных условий окончательно получим

$$\lambda_n\int_0^l \rho(x)y_n^2(x)\,dx = \int_0^l p(x)\Big[\frac{dy_n}{dx}\Big]^2 dx + \int_0^l q(x)y_n^2(x)\,dx, \tag{4.79}$$

что и доказывает утверждение.

4. *Собственные функции $y_n(x)$ образуют на $[0, l]$ ортогональную с весом $\rho(x)$ систему $\{y_n(x)\}$:*

$$\int_0^l y_n(x)y_m(x)\rho(x)\,dx = 0, \quad n \neq m. \tag{4.80}$$

Действительно, так как каждому собственному значению отвечает только одна собственная функция, то остается рассмотреть случай, когда собственные функции $y_n(x)$ и $y_m(x)$ соответствуют различным собственным значениям $\lambda_n \neq \lambda_m$.

Запишем для этих собственных функций уравнения

$$L[y_n] + \lambda_n\rho(x)y_n = 0, \quad L[y_m] + \lambda_m\rho(x)y_m = 0 \tag{4.81}$$

и, применив формулу Грина, получим

$$\int_0^l \big\{y_n(x)L[y_m] - y_m(x)L[y_n]\big\}\,dx =$$

$$= (\lambda_n - \lambda_m)\int_0^l y_n(x)y_m(x)\rho(x)\,dx =$$

$$= \big[p(x)\big(y_n(x)y_m'(x) - y_m(x)y_n'(x)\big)\big]\Big|_0^1. \tag{4.82}$$

Полученное выражение, очевидно, обращается в нуль, так как обе собственные функции $y_n(x)$ и $y_m(x)$ удовлетворяют однородным граничным условиям (4.74). Так как $\lambda_n \neq \lambda_m$, то отсюда и следует наше утверждение.

5. Теорема разложимости В. А. Стеклова. *Если функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0, l]$ и удовлетворяет однородным граничным условиям* (4.74), *то она разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся на $[0, l]$ ряд по собственным функциям $y_n(x)$ задачи* (4.73), (4.74):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x). \tag{4.83}$$

Доказательство теоремы Стеклова мы здесь приводить не будем. Укажем только, что свойство ортогональности собственных функций позволяет легко определить коэффициенты разложения f_n в формуле (4.83). Действительно, умножая обе части формулы (4.83) на $y_m(x)\rho(x)$ и интегрируя результат по $[0, l]$ (почленное интегрирование ряда возможно в силу его равномерной сходимости), на основании (4.80) получим

$$f_m = \frac{\int\limits_0^l f(x) y_m(x)\rho(x)\,dx}{\int\limits_0^l y_m^2(x)\rho(x)\,dx}. \tag{4.84}$$

Выражение, стоящее в знаменателе, называется *квадратом нормы собственной функции* и обозначается

$$||y_m||^2 = N_m^2 = \int\limits_0^l y_m^2(x)\rho(x)\,dx. \tag{4.85}$$

Так как собственные функции определены с точностью до множителя, то во многих случаях их нормируют так, чтобы $N_m = 1$. В этом случае система $\{y_n(x)\}$ является ортонормированной.

В заключение кратко остановимся на сведéнии рассматриваемой краевой задачи (4.73), (4.74) к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с симметричным ядром. Согласно сделанным выше предположениям функция Грина $G(x, \xi)$ задачи (4.26) существует и является симметричной функцией своих аргументов. Записав уравнение (4.73) в виде

$$L[y] = -\lambda\rho(x)y(x), \tag{4.86}$$

на основании результатов предыдущего параграфа получим

$$y(x) = -\lambda \int\limits_0^l G(x, \xi)\rho(\xi)y(\xi)\,d\xi. \tag{4.87}$$

Соотношение (4.87) называется *однородным интегральным уравнением Фредгольма второго рода.* Из приведенных рассуждений следует, что любое нетривиальное решение краевой задачи (4.73), (4.74) удовлетворяет и интегральному уравнению (4.87). С другой стороны, если $y(x)$ является решением уравнения (4.87), то из теоремы 4.1 следует, что $y(x)$ является решением краевой задачи (4.26), где $f(x) = -\lambda\rho(x)y(x)$, т. е. $y(x)$ является решением задачи (4.73), (4.74).

Тем самым имеет место эквивалентность исходной краевой задачи Штурма–Лиувилля и интегрального уравнения (4.87). Те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения (4.87), называются собственными значениями, а соответствующие им решения — собственными функциями уравнения (4.87). Из установленной эквивалентности следует, что краевая задача (4.73), (4.74) и интегральное уравнение (4.87) имеют одни и те же собственные значения и собственные функции.

Так как функция Грина $G(x,\xi)$ является симметричной функцией своих аргументов, ядро $-G(x,\xi)\rho(\xi)$ интегрального уравнения (4.87), вообще говоря, несимметрично. Однако это уравнение легко свести к интегральному уравнению с симметричным ядром. Действительно, умножив (4.87) на $\sqrt{\rho(x)}$ и обозначив $v(x) = \sqrt{\rho(x)}y(x)$, получим интегральное уравнение

$$v(x) = \lambda \int_0^l \mathcal{K}(x,\xi)v(\xi)\,d\xi \tag{4.88}$$

с симметричным ядром

$$\mathcal{K}(x,\xi) = -G(x,\xi)\sqrt{\rho(x)}\sqrt{\rho(\xi)}. \tag{4.89}$$

Очевидно, краевая задача (4.73), (4.74) и интегральное уравнение (4.88) имеют общие собственные значения λ_n, а соответствующие этим собственным значениям собственные функции $y_n(x)$ краевой задачи (4.73), (4.74) и собственные функции $v_n(x)$ интегрального уравнения (4.88) связаны соотношением

$$y_n(x) = v_n(x)/\sqrt{\rho(x)}. \tag{4.90}$$

Тем самым известные из теории интегральных уравнений свойства собственных значений и собственных функций интегрального уравнения Фредгольма второго рода с симметричным ядром дают возможность сделать заключение о свойствах собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма–Лиувилля.

ГЛАВА 5

ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dy}{dt} = F(t, y), \tag{5.1}$$

в которой неизвестной является n-мерная вектор-функция y с компонентами $y_1, \ldots, y_n$. Зададим начальное условие

$$y(0) = y_0. \tag{5.2}$$

Из § 5 гл. 2 известно, что при определенных естественных условиях гладкости на правые части (5.1) решение $y = y(t, y_0)$ задачи (5.1), (5.2) является непрерывной функцией t, y_0 в точке (t, y_0), где t — произвольное значение из некоторого конечного сегмента $[0, T]$. Геометрически это означает (рис. 8, на котором представлен случай одномерного y), что для любого $\varepsilon > 0$ существует столь малое $|\Delta y_0|$, что интегральная кривая $y = y(t, y_0 + \Delta y_0)$ будет лежать в полосе шириной 2ε около интегральной кривой $y = y(t, y_0)$, если $t \in [0, T]$. Таким образом, малая погрешность в начальных условиях не оказывает существенного влияния на характер процесса, если процесс рассматривается на некотором конечном отрезке $[0, T]$ времени t.

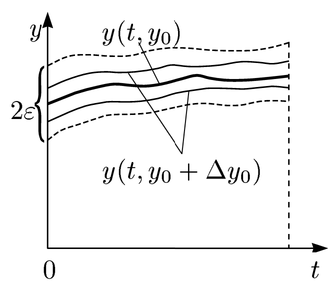

Рис. 8

Однако нередко требуется исследовать процесс на как угодно больших промежутках изменения времени, что математически выражается в том, что решение задачи (5.1), (5.2) следует рассматривать при $0 \leqslant t < \infty$. Будем заранее предполагать, что решение задачи (5.1), (5.2) существует на этом бесконечном промежутке. Возникает вопрос, останется ли кривая $y = y(t, y_0 + \Delta y_0)$ в ε-полосе около кривой $y = y(t, y_0)$ для всех $t > 0$, если только $|\Delta y_0|$ достаточно мало́ или с ростом t кривые разойдутся?

Примеры показывают, что может реализоваться и тот и другой случай. Рассмотрим простейший пример. Уравнение $\frac{dy}{dt} = ay - 1$ обладает решением $y(t, y_0) = 1/a$, начальное значение которого $y_0 = 1/a$. Пусть теперь начальное значение равно $y_0 + \Delta y_0$. Отвечающее этому начальному значению решение дается формулой

$$y(t, y_0 + \Delta y_0) = \left(y_0 + \Delta y_0 - \tfrac{1}{a}\right)e^{at} + \tfrac{1}{a} = \Delta y_0 e^{at} + \tfrac{1}{a}.$$

Отсюда видно, что если $a < 0$, то $|\Delta y| = \left|y(t, y_0 + \Delta y_0) - \frac{1}{a}\right| = |\Delta y_0| e^{at} < \varepsilon$ для всех $t \geqslant 0$, если только $|\Delta y_0| < \varepsilon$. Если же $a > 0$, то при достаточно больших t значение $|\Delta y|$ становится сколь угодно большим, как бы мало ни было $|\Delta y_0|$.

Интегральная кривая, обладающая тем свойством, что все достаточно близкие к ней при $t = 0$ интегральные кривые остаются близкими к ней и для всех $t > 0$, называется *устойчивой интегральной кривой*, а соответствующее ей решение — *устойчивым решением*. В противном случае говорят, что решение неустойчиво. В рассмотренном примере решение $y = 1/a$ при $a < 0$ является устойчивым решением, а при $a > 0$ — неустойчивым решением. Решения, рассматриваемые на $[0, \infty)$, делятся, таким образом, на два непересекающихся класса: устойчивые и неустойчивые.

Понятие устойчивости решения было введено А. М. Ляпуновым. Им же были заложены основы методов исследования на устойчивость. Идеи А. М. Ляпунова сохранили свое значение до сих пор и широко используются в современных исследованиях вопросов устойчивости.

Дадим теперь строгое определение понятия устойчивости. Введем обозначение $||y|| = \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$, где y_i $(i = 1, \dots, n)$ — ординаты вектор-функции y.

Определение*). Решение $y = y(t, y_0)$ задачи (5.1), (5.2) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что при $||\Delta y_0|| < \delta(\varepsilon)$ для всех $t > 0$ справедливо неравенство

$$||y(t, y_0 + \Delta y_0) - y(t, y_0)|| < \varepsilon. \tag{5.3}$$

Среди устойчивых решений может встретиться решение, обладающее тем свойством, что все близкие к нему в начальный момент решения не только не удаляются с течением времени, но бесконечно приближаются к нему. Поэтому вводится еще одно

*)В этом определении и в дальнейшем речь идет об устойчивости относительно начальных данных. Аналогично можно было бы ввести понятие устойчивости относительно параметров, входящих в правую часть уравнения.

Определение. Решение $y = y(t, y_0)$ задачи (5.1), (5.2) называется *асимптотически устойчивым*, если 1) оно устойчиво и 2) существует такое достаточно малое $\delta_0 > 0$, что при $\|\Delta y_0\| < \delta_0$

$$\lim_{t\to\infty} \big(y(t, y_0 + \Delta y_0) - y(t, y_0)\big) = 0. \tag{5.4}$$

Исследование на устойчивость решения $y(t, y_0)$ можно свести к исследованию на устойчивость тривиального, т. е. тождественно равного нулю, решения некоторой другой системы, связанной с (5.1). Действительно, перейдем от неизвестного y к новому неизвестному x по формуле $x = y - y(t, y_0)$. Тогда система (5.1) примет вид

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{5.5}$$

где $f(t,x) = F(t, x + y(t, y_0)) - \frac{d}{dt}y(t, y_0)$. Решению $y(t, y_0)$ в прежних переменных отвечает решение $x \equiv 0$ системы (5.5). Обозначим $x_0 = y(0, y_0 + \Delta y_0) - y(0, y_0) = \Delta y_0$, $x(t, x_0) = y(t, y_0 + \Delta y_0) - y(t, y_0)$. Тогда в переменных t, x определения устойчивости и асимптотической устойчивости выглядят следующим образом.

Определение. Тривиальное решение системы (5.5) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$ для всех $t > 0$ справедливо неравенство

$$\|x(t, x_0)\| < \varepsilon. \tag{5.6}$$

Определение. Тривиальное решение системы (5.5) называется *асимптотически устойчивым*, если 1) оно устойчиво и 2) существует $\delta_0 > 0$ такое, что при $\|x_0\| < \delta_0$

$$\lim_{t\to\infty} x(t, x_0) = 0. \tag{5.7}$$

Замечание. Иногда в записи $x(t, x_0)$ опускают зависимость от x_0 и пишут $x(t)$, а x_0 можно тогда записать как $x(0)$, и тогда устойчивость означает, что

$$\|x(t)\| < \varepsilon \tag{5.8}$$

при

$$\|x(0)\| < \delta(\varepsilon), \tag{5.9}$$

а асимптотическая устойчивость — что, сверх того,

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \tag{5.10}$$

если $\|x(0)\| < \delta_0$.

В дальнейшем мы будем знакомиться с методами исследования на устойчивость именно тривиального решения.

Устойчивость тривиального решения допускает удобную геометрическую интерпретацию не только в $(n+1)$-мерном пространстве переменных t, x, но и в n-мерном фазовом пространстве переменных x (понятие фазового пространства было введено в гл. 1). Наглядное изображение здесь можно дать для случая $n = 2$ (рис. 9). Тривиальное решение в фазовом пространстве изображается точкой — началом координат. Неравенство (5.8) в двумерном случае означает, что фазовая траектория при $t > 0$ лежит в круге радиуса ε с центром в начале координат, а неравенство (5.9) — что начальная точка траектории лежит в круге радиуса $\delta(\varepsilon)$, т. е. траектория, начинающаяся в δ-окрестности начала координат, не выйдет из ε-окрестности начала координат при всех $t > 0$; в случае асимптотической устойчивости траектория при $t \to \infty$ бесконечно приближается к началу координат.

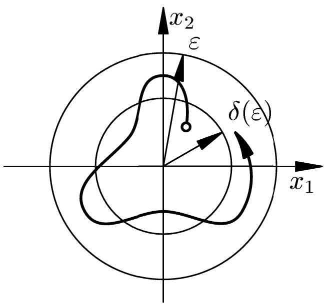

Рис. 9

Замечание. Вместо того, чтобы говорить об устойчивости тривиального решения, часто говорят об устойчивости точки $(0, \ldots, 0)$ фазового пространства.

Рассмотрим систему двух линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{5.11}$$

где A — постоянная (2×2)-матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Система (5.11) имеет тривиальное решение $x = 0$. Будем исследовать его на устойчивость. Поскольку решение системы (5.11), удовлетворяющее произвольным начальным условиям, выписывается явно, то устойчивость или неустойчивость тривиального решения можно установить непосредственно. В общем случае это сделать нельзя. Однако результаты, которые мы получим для (5.11), подскажут направление исследования общего случая.

Получим сначала некоторые вспомогательные неравенства.

Согласно изложенному в § 6 и 7 гл. 3 решение $x(t, x_0)$ системы (5.11), принимающее начальное значение x_0, представимо в виде

$$x(t, x_0) = \mathcal{K}(t, 0)x_0, \tag{5.12}$$

где $\mathcal{K}(t, 0) = W(t)W^{-1}(0)$; $W(t)$ — фундаментальная матрица, имеющая в качестве столбцов два линейно независимых решения:

$$x_{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha_{(1)1} \\ \alpha_{(1)2} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}, \quad x_{(2)} = \begin{pmatrix} \alpha_{(2)1} \\ \alpha_{(2)2} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}. \tag{5.13}$$

Здесь λ_1, λ_2 — характеристические числа матрицы A (корни характеристического уравнения), а $\alpha_{(j)i}$ — некоторые числа, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, и многочлены по t степени не выше первой, если $\lambda_1 = \lambda_2$.

Пусть $\lambda_j = p_j + iq_j$. Тогда $|e^{\lambda_j t}| = e^{p_j t}$ и для элементов $\mathcal{K}_{ij}$ матрицы $\mathcal{K}(t, 0)$ справедлива следующая оценка:

$$|\mathcal{K}_{ij}| < (C_1 + C_2 t)e^{pt}, \tag{5.14}$$

где $p = \max\{p_1, p_2\}$; C_1, C_2 — некоторые постоянные, причем $C_2 = 0$ в случае $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Неравенство (5.14) можно записать (учитывая, что при любом $\gamma > 0$ имеет место неравенство $te^{-\gamma t} \leqslant \dfrac{1}{\gamma}e^{-1} = C_3$) также в следующей форме:

$$|\mathcal{K}_{ij}| < (C_1 + C_2 t)e^{-\gamma t}e^{(p+\gamma)t} \leqslant (C_1 + C_2 C_3)e^{(p+\gamma)t},$$

то есть,

$$|\mathcal{K}_{ij}| < Ce^{(p+\gamma)t}. \tag{5.15}$$

Получим еще одно вспомогательное неравенство. Пусть $y = A(t)x$, где y, x — столбцы, $A(t)$ — квадратная матрица. Пусть элементы $A(t)$ подчиняются неравенству $|a_{ij}(t)| < a(t)$. Тогда

$$||y|| \leqslant 2a(t)||x||. \tag{5.16}$$

Действительно, для двумерного случая имеем $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$ и, следовательно,

$$y_1^2 = a_{11}^2 x_1^2 + a_{12}^2 x_2^2 + 2a_{11}a_{12}x_1 x_2 \leqslant \\ \leqslant a_{11}^2 x_1^2 + a_{12}^2 x_2^2 + |a_{11}| \cdot |a_{12}|(x_1^2 + x_2^2) \leqslant 2a^2(x_1^2 + x_2^2).$$

Учитывая аналогичную оценку для y_2, получим $y_1^2 + y_2^2 \leqslant 4a^2(x_1^2 + x_2^2)$, что равносильно (5.16).

Применяя неравенство (5.16) к (5.12) и беря в качестве $a(t)$ правую часть (5.14) или (5.15), получим (коэффициент 2 можно включить в C_i или C)

$$||x(t, x_0)|| \leqslant (C_1 + C_2 t)e^{pt}||x_0||, \tag{5.17}$$

$$||x(t, x_0)|| \leqslant Ce^{(p+\gamma)t}||x_0||. \tag{5.18}$$

Обратимся теперь непосредственно к исследованию тривиального решения системы (5.11). Рассмотрим разные случаи.

1. Пусть $p_1 = \operatorname{Re}\lambda_1 < 0$, $p_2 = \operatorname{Re}\lambda_2 < 0$. Тогда $p = \max\{p_1, p_2\} < 0$ и, следовательно, при достаточно малом γ имеем $p + \gamma < 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ получим из (5.18) $\|x(t, x_0)\| \leqslant C\|x_0\| < \varepsilon$, если $\|x_0\| < \varepsilon/C = \delta(\varepsilon)$ и, таким образом, тривиальное решение системы (5.11) устойчиво. Из (5.18) видно также, что $x(t, x_0) \to 0$ при $t \to \infty$ и, таким образом, решение асимптотически устойчиво.

2. Пусть среди значений p_1, p_2 имеется хотя бы одно положительное, например, p_1. В этом случае, как нетрудно видеть, тривиальное решение системы (5.11) устойчивым не является. Допустим противное, т. е. что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что при $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$ справедливо $\|x\| < \varepsilon$. Дальнейшие рассуждения будут несколько различаться в зависимости от того, являются λ_i действительными или комплексно сопряженными. При действительных λ_i достаточно рассмотреть решение $x = Cx_{(1)}$. При достаточно малом $|C|$, очевидно, $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$, но неравенство $\|x\| < \varepsilon$ не может быть выполнено при всех $t > 0$, так как $e^{p_1 t} \to \infty$ при $t \to \infty$. Если же λ_i комплексные, то $p_1 = p_2 = p$, $\lambda_1 = p + iq$ и рассмотрим решение $x = C\operatorname{Re} x_{(1)}$. При достаточно малом $|C|$, по-прежнему, $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$. Возьмем одну из компонент этого решения, отличную от тождественного нуля, например, $x_1 = C\beta_1(t)e^{pt}$, где $\beta_1(t)$ — некоторая вполне определенная линейная комбинация $\cos qt$ и $\sin qt$. Очевидно, x_1 не является ограниченным при $t \to \infty$, и поэтому неравенство $\|x\| < \varepsilon$ также не может быть выполненным при всех $t > 0$.

3. Осталось рассмотреть случай, когда $p_1 = 0$, $p_2 < 0$ или когда $p_1 = p_2 = 0$. Последнее означает, что λ_1 и λ_2 либо чисто мнимые, либо равные нулю и кратные. В случае $p_1 = 0$, $p_2 < 0$ или чисто мнимых λ_j в формуле (5.17) $p = 0$, $C_2 = 0$, так что $\|x(t, x_0)\| \leqslant C_1\|x_0\|$ и решение устойчиво по тем же причинам, что и в п. 1. Асимптотической устойчивости здесь, однако, уже не будет, так как, очевидно, найдутся решения, не стремящиеся к нулю при $t \to \infty$. В случае $p_1 = 0$, $p_2 < 0$ таким решением будет, например, решение вида $x = Cx_{(1)}$, для которого при достаточно малом $|C|$ величина $\|x_0\|$ как угодно мала, однако $\|x\| = \mathrm{const} \not\to 0$ при $t \to \infty$. При чисто мнимых λ_i, очевидно, $x = C\operatorname{Re} x_{(1)} \not\to 0$ при $t \to \infty$.

Если же $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то $e^{\lambda_1 t} = e^{\lambda_2 t} = 1$, а $\alpha_{(j)i}$ — линейные функции t, и поэтому неравенство $\|x(t, x_0)\| < \varepsilon$ не может выполняться для всех $t > 0$, за исключением того случая, когда все $\alpha_{(j)i}$ вырождаются в многочлены нулевой степени. Но этот случай реализуется лишь при $a_{ik} = 0$, и решение тогда имеет вид $x_1 = x_{01}$, $x_2 = x_{02}$ и, очевидно, является устойчивым, но не асимптотически.

З а м е ч а н и е. Нетрудно видеть, что проведенный анализ в значительной мере остается справедливым и для n-мерного случая. Так, сохраняются оценка (5.15) для $\mathcal{K}_{ij}$ и неравенство (5.16), в котором изменится только то, что вместо коэффициента 2 появится некоторая величина, зависящая от n. Останется справедливым неравенство (5.18). Нетрудно видеть также, что рассуждения, приведенные в пп. 1 и 2, фактически без изменений переносятся на n-мерный случай.

Подводя итоги, можно сделать вывод, что *тривиальное решение однородной системы линейных уравнений устойчиво и притом асимптотически, если* $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ *для всех* i, *и неустойчиво, если* $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$ *хотя бы для одного* i.

При наличии характеристических чисел с равной нулю действительной частью ситуация является более сложной. Дополнительный анализ показывает, что если характеристические числа с равными нулю действительными частями не являются кратными, то при условии, что прочие λ удовлетворяют требованию $\operatorname{Re}\lambda < 0$, будет иметь место устойчивость, но не асимптотическая. Если же среди λ с нулевыми действительными частями имеются кратные, то устойчивости, вообще говоря, не будет, даже если для прочих λ имеет место неравенство $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

§ 2. Исследование на устойчивость по первому приближению

Обратимся к системе общего вида (5.5) и рассмотрим так называемый автономный случай, когда f не зависит явно от t. Запишем систему в координатной форме:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.19}$$

Так как понятие устойчивости тривиального решения связано с малой окрестностью начала координат в фазовом пространстве, то естественно ожидать, что поведение решения системы (5.19) будет определяться главными членами разложения f по x в окрестности $x = 0$. Так как $f_i(0, \ldots, 0) = 0$ (поскольку $x = 0$ является решением системы (5.19)), то главными членами будут линейные члены разложения f по x, или, как их иначе называют, члены первого приближения.

По формуле Тейлора, учитывая, что $f_i(0, \ldots, 0) = 0$, имеем

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k + R_{(2)i}, \tag{5.20}$$

где

$$a_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(0, \ldots, 0),$$

$$R_{(2)i} = \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_l}(\theta x_1, \ldots, \theta x_n) x_j x_l. \tag{5.21}$$

Если в (5.20) отбросить $R_{(2)i}$, то вместо (5.19) получим линейную систему вида

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k, \tag{5.22}$$

которую будем называть системой первого приближения для системы (5.19). Поведение системы (5.22) в отношении устойчивости или неустойчивости тривиального решения определяется свойствами корней λ характеристического уравнения, как было выяснено в конце предыдущего параграфа. Можно ожидать, что те же требования на λ обеспечат не только устойчивость или неустойчивость тривиального решения системы (5.22), но и тривиального решения исходной системы (5.19). Как будет видно ниже, это предположение оправдывается. Однако прежде чем формулировать соответствующую теорему, докажем лемму, содержащую некоторые вспомогательные неравенства, которые потребуются при доказательстве теоремы. В дальнейшем, как это нередко делается, все встречающиеся положительные постоянные, величины которых не играют существенных ролей, будем обозначать одной и той же буквой C (так, в неравенстве (5.17) можно было бы написать $\|x(t, x_0)\| \leqslant (C + Ct)e^{pt}\|x_0\|$ и т. д.).

Лемма 5.1. *Имеют место следующие утверждения:*

1°. *Пусть y является вектором с компонентами*

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t) x_k,$$

где $|a_{ik}(t)| < a(t)$. Тогда

$$\|y\| \leqslant Ca(t)\|x\|.$$

2°. *Пусть y является вектором с компонентами*

$$y_i = \sum_{j,l=1}^{n} a_{ijl} x_j x_l,$$

где $|a_{ijl}| < a(t)$. Тогда

$$\|y\| \leqslant Ca(t)\|x\|^2.$$

3°. *Для любой пары векторов x и y справедливо неравенство*

$$\|x+y\| \leqslant C(\|x\|+\|y\|).$$

4°. *Для любого вектора y справедливо неравенство*

$$\left\| \int_0^t y\, d\xi \right\| \leqslant C \int_0^t \|y\|\, d\xi.$$

5°. *Для матриганта $\mathcal{K}(t,\xi)$ линейной системы (5.22) справедливо неравенство*

$$|\mathcal{K}_{ij}(t,\xi)| = |\mathcal{K}_{ij}(t-\xi,0)| < Ce^{(p+\gamma)(t-\xi)}, \tag{5.23}$$

где $p = \max_{i=1,\ldots,n}(\operatorname{Re}\lambda_i)$, γ — положительная постоянная.

Доказательство. 1°. Утверждение было доказано для двумерного случая (см. (5.16)). Для произвольного n, как было уже отмечено в предыдущем параграфе, доказательство проводится подобным же образом.

2°. Утверждение доказывается при помощи аналогичных соображений, поэтому доказательство опускаем.

3°. Имеем

$$\begin{aligned}(x+y)_i = x_i + y_i \;\Rightarrow\; [(x+y)_i]^2 = x_i^2 + y_i^2 + 2x_iy_i \leqslant \\ \leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| = (\|x\|+\|y\|)^2 \;\Rightarrow\; \|x+y\|^2 \leqslant \\ \leqslant n(\|x\|+\|y\|)^2 \;\Rightarrow\; \|x+y\| \leqslant C(\|x\|+\|y\|) \qquad (C=\sqrt{n}).\end{aligned}$$

4°. Имеем

$$\begin{aligned}\left(\int_0^t y\, d\xi\right)_i = \int_0^t y_i\, d\xi \;\Rightarrow\; \left[\left(\int_0^t y\, d\xi\right)_i\right]^2 \leqslant \\ \leqslant \left(\int_0^t \|y\|\, d\xi\right)^2 \;\Rightarrow\; \left\|\int_0^t y\, d\xi\right\| \leqslant C\int_0^t \|y\|\, d\xi \qquad (C=\sqrt{n}).\end{aligned}$$

Замечание. Указанные неравенства легко вывести из теорем линейной алгебры.

5°. Для $\mathcal{K}(t,\xi)$ справедливо неравенство (5.15):

$$|\mathcal{K}_{ij}(t,0)| < Ce^{(p+\gamma)t} \tag{5.24}$$

(см. замечание в конце § 1). Убедимся, что $\mathcal{K}(t,\xi) = \mathcal{K}(t-\xi,0)$. Действительно, $\mathcal{K}(t,\xi)$ удовлетворяет уравнению $\frac{d}{dt}\mathcal{K}(t,\xi) = A\mathcal{K}(t,\xi)$, где A — матрица с элементами a_{ik}, и начальному условию $\mathcal{K}|_{t=\xi} =$

$= \mathcal{K}(\xi,\xi) = E$. Заменяя независимое переменное t на $t-\xi$ и учитывая, что $A = \mathrm{const}$, получим, что $\mathcal{K}(t-\xi,0)$ удовлетворяет тому же уравнению и начальному условию $\mathcal{K}|_{t-\xi=0} = \mathcal{K}(0,0) = E$. Поэтому в силу теоремы единственности

$$\mathcal{K}(t,\xi) = \mathcal{K}(t-\xi,0).$$

Отсюда и из (5.24) последует (5.23).

Сформулируем теперь теорему, обеспечивающую возможность судить об устойчивости или неустойчивости тривиального решения системы (5.19) по характеристическим числам матрицы первого приближения.

Теорема 5.1. *Пусть в некоторой окрестности точки $x_1 = 0,\ldots \ldots, x_n = 0$ фунции $f_i(x_1,\ldots,x_n)$ $(i = 1,\ldots,n)$ непрерывны вместе с производными до второго порядка включительно. Тогда, если все характеристические числа λ_i матрицы с элементами $a_{ik} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}(0,...,0)$ удовлетворяют условию $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, то тривиальное решение системы* (5.19) *устойчиво и притом асимптотически.*

Доказательство. Пользуясь представлением (5.20) для правых частей (5.19) и рассматривая (5.19) как систему (3.71), в которой $f = R_{(2)}$, перейдем от дифференциального уравнения (5.19) с начальным условием $x(0) = x_0$ к эквивалентному интегральному уравнению (см. (3.87))

$$x = \mathcal{K}(t,0)x_0 + \int_0^t \mathcal{K}(t,\xi)R_{(2)}(\xi)\,d\xi. \tag{5.25}$$

Рассмотрим некоторую окрестность Ω точки $x = 0$ фазового пространства. Пусть для определенности Ω задается равенством $\|x\| \leqslant K$, где K — некоторая постоянная. Согласно лемме 5.1 в области Ω для $R_{(2)}$ справедлива оценка $\|R_{(2)}\| < C\|x\|^2$, и от (5.25) можно перейти к неравенству

$$\|x\| \leqslant Ce^{-\alpha t}\|x_0\| + C\int_0^t e^{-\alpha(t-\xi)}\|x\|^2\,d\xi, \tag{5.26}$$

где $-\alpha = p + \gamma$. Так как в рассматриваемом случае $p < 0$, то при достаточно малом γ имеем $\alpha > 0$.

Рассмотрим теперь вспомогательную скалярную задачу

$$\frac{dz}{dt} = -\alpha z + Cz^2, \qquad z(0) = z_0 > C\|x_0\|. \tag{5.27}$$

Это уравнение элементарно интегрируется (как уравнение с разделяющимися переменными или как уравнение Бернулли), и решение имеет вид
$$z = \frac{\alpha z_0}{Cz_0 + (\alpha - Cz_0)e^{\alpha t}}.$$

Это решение, как нетрудно видеть, обладает следующими свойствами:

1) $z > 0$ при $t \geqslant 0$, если z_0 достаточно мало: $z_0 < \alpha/C$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ имеем $z < \dfrac{\alpha z_0}{Cz_0 + \alpha - Cz_0} = z_0$ и, следовательно, $z < \varepsilon$, если $z_0 < \varepsilon$.

3) $z(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Напишем теперь для $z(t)$ интегральное уравнение по типу (5.25):

$$z = z_0 e^{-\alpha t} + C\int_0^t e^{-\alpha(t-\xi)} z^2 d\xi \tag{5.28}$$

и сравним $\|x\|$ и z. Убедимся, что при $t \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\|x\| < z. \tag{5.29}$$

В самом деле, при $t = 0$ неравенство (5.29) справедливо, так как, полагая в (5.26) $t = 0$ получим $\|x_0\| < z_0$. Предположим, что при некотором значении $t = t_1$ неравенство (5.29) перестает выполняться и имеет место $\|x(t_1)\| = z(t_1)$. Из свойства 2) функции $z(t)$ следует, что при достаточно малом z_0 имеем $\|z\| \leqslant K$ для $t \geqslant 0$. При $0 \leqslant t \leqslant t_1$ справедливо (5.29), и поэтому $\|x\| \leqslant K$ (т. е. $x \in \Omega$). Таким образом, при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ справедливо неравенство (5.26), и при $t = t_1$ имеем

$$z(t_1) = z_0 e^{-\alpha t_1} + C\int_0^{t_1} e^{-\alpha(t_1-\xi)} z^2 d\xi = \|x(t_1)\| \leqslant$$
$$\leqslant C\|x_0\|e^{-\alpha t} + C\int_0^{t_1} e^{-\alpha(t_1-\xi)}\|x\|^2 d\xi < z_0 e^{-\alpha t_1} + C\int_0^{t_1} e^{-\alpha(t_1-\xi)} z^2 d\xi.$$

Сравнивая крайние члены этой цепочки неравенств, получим противоречие в виде $1 < 1$, что и доказывает справедливость (5.29) для $t > 0$.

А теперь, воспользовавшись неравенством (5.29), нетрудно уже получить утверждение теоремы. В самом деле, пусть задано любое $\varepsilon > 0$. Возьмем $\|x_0\| < \varepsilon/(2C) = \delta$, а z_0 выберем так, чтобы выполнялось неравенство $C\delta < z_0 < 2C\delta = \varepsilon$. Тогда будет выполнено требование $z_0 > C\|x_0\|$ в (5.27), и в силу (5.29) и свойства 2) функции z будем иметь $\|x\| < z < z_0 < \varepsilon$ при $\|x_0\| < \delta$, т. е. тривиальное решение системы (5.19) устойчиво. То же неравенство (5.29) вместе со свойством 3° функции $z(t)$ обеспечивает асимптотическую устойчивость тривиального решения системы (5.19).

Замечания.

1. Нами доказана теорема об асимптотической устойчивости. Имеет место также следующее утверждение о неустойчивости: *если* $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$ *хотя бы для одного* i, *то тривиальное решение системы* (5.19) *неустойчиво.*

2. Утверждения об асимптотической устойчивости и о неустойчивости остаются справедливыми и для случая, когда f зависит явно от t, если только справедливо представление $f_i(x,t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k + R_i$, где $a_{ik} = \text{const}$, а $\|R\| < C\|x\|^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$ — любое.

3. Если среди λ встречаются такие, для которых $\operatorname{Re}\lambda = 0$, то даже если тривиальное решение системы первого приближения (5.22) устойчиво, тривиальное решение системы (5.19) в зависимости от R может быть как устойчивым, так и неустойчивым. В этом случае, который обычно называется *критическим*, зная только характеристические числа матрицы первого приближения, нельзя, вообще говоря, сделать вывод об устойчивости при неустойчивости тривиального решения системы (5.22). В критических случаях метод исследования на устойчивость по первому приближению теряет силу и нужно использовать свойства последующих членов в разложении (5.20) или другие методы.

§ 3. Метод функций Ляпунова

Метод исследования на устойчивость, изложенный в предыдущем параграфе, при всей его естественности не всегда дает ответ на поставленный вопрос.

А. М. Ляпуновым был предложен также и другой метод. В этом методе заданной системе уравнений сопоставляется некоторая функция от аргументов $x_1, \ldots, x_n$, называемая *функцией Ляпунова*, и по ее свойствам можно делать вывод об устойчивости решения.

Проиллюстрируем идею метода на простейшем примере:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 = f_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = -2x_2 = f_2. \tag{5.30}$$

По предыдущему мы знаем, что тривиальное решение этой системы устойчиво, так как $\lambda_1 = -1 < 0$, $\lambda_2 = -2 < 0$. Однако чтобы убедиться в устойчивости тривиального решения, можно рассуждать и по-другому. Рассмотрим функцию $V(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2$. Эта функция положительна всюду, кроме точки $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, где она обращается в нуль. В пространстве переменных x_1, x_2, V уравнение $V = 2x_1^2 + x_2^2$ определяет параболоид с вершиной в начале координат. Линии уровня этой поверхности на плоскости (x_1, x_2) представляют собой эллипсы. Зададим произвольно малое ε. Построим на плоскости (x_1, x_2) круг ω_ε радиуса ε. Возьмем одну из линий уровня — эллипс, целиком лежащий внутри круга ω_ε. Построим другой круг ω_δ, целиком лежащий внутри эллипса (рис. 10). Пусть начальная точка $A(x_{10}, x_{20})$ лежит внутри ω_δ.

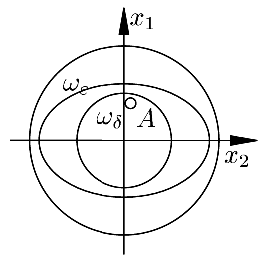

Рис. 10

Рассмотрим функцию двух переменных $W(x_1, x_2) = (\operatorname{grad} V, f)$. Легко видеть, что если вместо x_1, x_2 подставить решение $x_1(t), x_2(t)$ системы (5.30), то полученная таким образом функция от t будет представлять собой полную производную $\frac{dV}{dt}$ от $V(x_1(t), x_2(t))$ вдоль траектории решения системы (5.30). Если эта производная вдоль любой траектории, начинающейся в ω_δ, неположительна, то это будет означать, что такая траектория не сможет покинуть ω_ε, так как иначе между $t = 0$ и значением $t = t_1$, при котором она попадает на границу ω_ε, найдется значение $t = t^*$, для которого $\frac{dV}{dt} > 0$, поскольку $V(x_1(t_1), x_2(t_1)) > V(x_{10}, x_{20})$. То, что ни одна траектория, начинающаяся в ω_δ, не покидает ни при одном $t > 0$ круг ω_ε, означает устойчивость тривиального решения.

Итак, мы должны проверить знак $\frac{dV}{dt}$ вдоль траектории. Для этого надо знать саму траекторию. Хотя в данном примере это можно сделать, но метод должен быть рассчитан на систему общего вида, для которой $x_1(t), x_2(t)$ нельзя выписать явно и тем самым проверить нужное неравенство. Поэтому мы будем требовать, чтобы функция $W(x_1, x_2)$ была неположительной как функция двух независимых переменных x_1, x_2 по крайней мере в некоторой окрестности $(0, 0)$. Это условие можно проверить непосредственно по правым частям системы, не зная решения. В нашем примере именно так и будет, поскольку $W(x_1, x_2) = -2[(x_1 - x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2] \leqslant 0$ всюду на плоскости (x_1, x_2), а тем самым вдоль любой траектории, и устойчивость тривиального решения гарантирована.

Функция $V(x_1, x_2)$, участвующая в этих рассуждениях, и есть функция Ляпунова для рассматриваемого примера. Она имеет вид квадратичной формы $2x_1^2 + x_2^2$, хотя в принципе вместо $2x_1^2 + x_2^2$ можно было бы взять и другую функцию, лишь бы она была положительной всюду, кроме точки $(0,0)$, где она обращается в нуль, а выражение $(\operatorname{grad} V, f) \equiv W(x_1, x_2)$ было неположительным. Подчеркнем еще раз, что в приведенных рассуждениях важны как положительность функции V, так и неположительность функции W, значение которой вдоль траектории представляет собой полную производную от V по t вдоль траектории.

Обратимся теперь к формулировке и доказательству некоторых общих теорем, в основу которых положена эта идея. Будем исследовать тривиальное решение системы (5.5):

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \tag{5.31}$$

Все дальнейшие построения будем вести в некоторой Ω-окрестности начала координат в фазовом пространстве. Пусть для определенности Ω задается неравенством $\|x\| \leqslant K$, где K — некоторая постоянная.

Определение. Функция $V(x_1, \ldots, x_n)$ (или, короче, $V(x)$) называется *положительно определенной* в Ω, если $V(x) \geqslant 0$ в Ω, причем $V(x) = 0$ лишь при $x = 0$.

Лемма 5.2. *Пусть $V(x)$ — положительно определенная и непрерывная в Ω функция. Тогда*

а) для всех x, удовлетворяющих неравенству $\|x\| \geqslant \varepsilon_1 > 0$, существует $\varepsilon_2 > 0$ такое, что $V(x) \geqslant \varepsilon_2$;

б) обратно, из неравенства $V(x) \geqslant \varepsilon_2 > 0$ следует существование $\varepsilon_1 > 0$ такого, что $\|x\| \geqslant \varepsilon_1$.

Доказательство. а) Пусть $\|x\| \geqslant \varepsilon_1$, в то же время $\|x\| \leqslant K$. На множестве $\varepsilon_1 \leqslant \|x\| \leqslant K$ функция $V(x)$ как непрерывная функция достигает своего минимального значения, которое обозначим ε_2. Очевидно, $\varepsilon_2 \neq 0$, так как $V = 0$ только при $x = 0$. Таким образом,

$$V(x) \geqslant \varepsilon_2 > 0. \tag{5.32}$$

б) Рассуждаем от противного. Пусть $V(x) \geqslant \varepsilon_2 > 0$, а неравенство $\|x\| \geqslant \varepsilon_1$ не выполяется ни при каком ε_1. Это значит, что существует последовательность $\overset{(n)}{x} \to 0$ и при этом $V(\overset{(n)}{x}) \geqslant \varepsilon_2$. В силу непрерывности $V(x)$ справедливо предельное соотношение:

$$\lim_{n\to\infty} V(\overset{(n)}{x}) = V(0) = 0. \tag{5.33}$$

Но это противоречит соотношению $\lim_{n\to\infty} V(\overset{(n)}{x}) \geqslant \varepsilon_2 > 0$, следующему из того, что $V(\overset{(n)}{x}) \geqslant \varepsilon_2$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Теорема 5.2 (об устойчивости). *Пусть в Ω существует непрерывная вместе с частными производными первого порядка положительно определенная функция $V(x)$ такая, что функция*

$$W(x,t) = (\operatorname{grad} V, f(t,x))$$

удовлетворяет неравенству

$$W(x,t) \leqslant 0 \quad \text{для} \;\; t > 0, \quad x \in \Omega. \tag{5.34}$$

Тогда тривиальное решение системы (5.31) *устойчиво.*

Доказательство. Зададим любое $\varepsilon > 0$. Лемма 5.2 обеспечивает (положим $\varepsilon_1 = \varepsilon$) существование $\varepsilon_2(\varepsilon)$ такого, что для $\|x\| \geqslant \varepsilon$ имеем $V(x) \geqslant \varepsilon_2$. Далее, в силу непрерывности $V(x)$ (при $x = 0$) существует $\delta_1(\varepsilon_2) = \delta(\varepsilon)$ такое, что при $\|x\| < \delta$ имеем $V(x) \leqslant \varepsilon_2/2$.

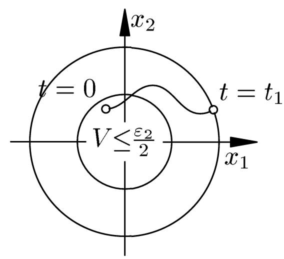

Рис. 11

Возьмем начальную точку $x(0) = x_0$ в δ-сфере ω_δ фазового пространства переменных x (рис. 11 наглядно иллюстрирует ситуацию на двумерном случае), т. е. пусть $\|x(0)\| < \delta$. Тогда $V(x(0)) \leqslant \varepsilon_2/2$. Нужно доказать, что траектория останется для всех $t > 0$ в ε-сфере ω_ε (см. (5.8)).

Предположим противное, т. е. что траектория при некотором $t = t_1$ покинет ω_ε (оставаясь в Ω). Тогда $V(x(t_1)) \geqslant \varepsilon_2$. Имеем, таким образом,

$$V(x(t_1)) - V(x(0)) \geqslant \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_2}{2} = \frac{\varepsilon_2}{2} > 0. \tag{5.35}$$

Но с другой стороны,

$$V(x(t_1)) - V(x(0)) = t_1 \frac{dV}{dt}\bigg|_{t=t^*} = t_1 \Big(\operatorname{grad} V, \frac{dx}{dt}\Big)_{t=t^*} =$$
$$= \big(\operatorname{grad} V, f(t^*, x(t^*))\big) t_1 = W(x(t^*), t^*) t_1 \leqslant 0 \tag{5.36}$$

для $0 \leqslant t^* \leqslant t_1$, так как (5.34) выполняется всюду в Ω, а тем более вдоль траектории. Неравенства (5.35) и (5.36) составляют противоречие, доказывающее теорему.

Теорема 5.3 (об асимптотической устойчивости). *Пусть дополнительно к условиям теоремы 5.2 для $t \geqslant 0$, $x \in \Omega$ выполняется неравенство $W(x,t) \leqslant \overline{W}(x)$, где $\overline{W}(x)$ — положительно определенная* *в Ω функция. Тогда тривиальное решение системы* (5.31) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Устойчивость тривиального решения следует из предыдущей теоремы. Убедимся, что

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0. \tag{5.37}$$

Используя выражение для полной производной от V вдоль траектории, получим $\frac{dV}{dt} = W(x(t),t) \leqslant -\overline{W}(x(t)) \leqslant 0$, т. е. $V(x(t))$ с ростом t монотонно не возрастает. Поэтому существует $\lim_{t\to\infty} V(x(t)) = \alpha \geqslant 0$. Докажем, что $\alpha = 0$. Предположим, что $\alpha > 0$. Так как $V(x(t)) \geqslant \alpha$ (V стремится к пределу сверху), то, полагая в пункте б) леммы 5.2 $\varepsilon_2 = \alpha$, получим $\|x(t)\| \geqslant \varepsilon_1$, а тогда по той же лемме (п. а)) имеем $\overline{W}(x(t)) \geqslant \beta > 0$, т. е. $-\overline{W}(x(t)) \leqslant -\beta < 0$. Поэтому $V(x(t)) - V(x(0)) = \frac{dV}{dt}|_{t=t^*} t \leqslant -\overline{W}(x(t^*))t \leqslant -\beta t$.

Отсюда получим, что $V(x(t)) \to -\infty$ при $t \to \infty$. Но с другой стороны, так как в силу устойчивости $x(t) \in \Omega$, то $V(x(t)) \geqslant 0$. Противоречие приводит к выводу, что $\alpha = 0$.

Итак,

$$\lim_{t\to\infty} V(x(t)) = 0. \tag{5.38}$$

Докажем, что отсюда следует (5.37).

Допустим противное. Тогда существует $\varepsilon_1 > 0$ и такая последовательность $t_n \to \infty$, что $\|x(t_n)\| \geqslant \varepsilon_1$. Но тогда по лемме 5.2 $V(x(t_n)) \geqslant \varepsilon_2$, что противоречит (5.38). Противоречие доказывает (5.37), а вместе с тем и всю теорему.

Пример 5.1. В рассмотренной выше системе (5.30) имеет место не только устойчивость, но и асимптотическая устойчивость, так как $-W(x_1, x_2)$ не зависит от t и является положительно определенной функцией. Однако на этом примере нельзя убедиться в важности теорем 5.2 и 5.3, поскольку здесь применимы соображения предыдущего параграфа и асимптотическая устойчивость следует из отрицательности λ_1 и λ_2.

Приведем пример системы, когда теорема 5.1 о первом приближении неприменима, а функция Ляпунова дает ответ:

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_2 - x_1^3 \sin^2 t, \quad \frac{dx_2}{dt} = -3x_1 - x_2^5.$$

Возьмем $V(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2$. Тогда $W(x,t) = -6x_1^4 \sin^2 t - 4x_2^6 \leqslant 0$. Следовательно, по теореме 5.2 тривиальное решение устойчиво. Теорема 5.1 здесь ответа не дает, так как характеристические числа матрицы первого приближения являются чисто мнимыми.

Можно использовать аналогичные идеи для доказательства неустойчивости тривиального решения системы (5.31). Такого рода теоремы впервые были предложены Н. Г. Четаевым. Мы приведем здесь простейший вариант теоремы о неустойчивости.

Теорема 5.4 (о неустойчивости). *Пусть в Ω существует непрерывная вместе с частными производными первого порядка функция $V(x)$ такая, что:*

а) *в любой δ-окрестности ω_δ начала координат существует точка x, в которой $V(x) > 0$ (и, следовательно, область, в которой $V(x) > \alpha$, где $\alpha > 0$ — некоторое число),*

б) *для любого $\alpha > 0$ существует $\beta > 0$ такое, что из условия $x \in \omega_\varepsilon$ (ω_ε — некоторая ε-окрестность начала координат), $V(x) \geqslant \alpha$ следует неравенство $W(x,t) = (\operatorname{grad} V, f(t,x)) \geqslant \beta$, справедливое при всех $t \geqslant 0$.*

Тогда тривиальное решение системы (5.31) *неустойчиво.*

Доказательству теоремы предпошлем пример. Рассмотрим систему вида
$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 x_2^4, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_2 x_1^2.$$
Возьмем $V(x) = x_1x_2$. Очевидно, в любой ω_δ существует точка (лежащая, например, в первом квадранте), где $V = x_1x_2 > 0$. Пусть начальная точка такова, что $x_1^0 x_2^0 = \alpha > 0$. На рис. 12 заштрихована часть $\omega_\varepsilon^\alpha$ круга ω_ε, выделяемая гиперболой $x_1x_2 = \alpha$, в которой $V \geqslant \alpha$. Очевидно, в $\omega_\varepsilon^\alpha$ справедливо неравенство $x_1^2 + x_2^2 \geqslant 2\alpha$, т. е. $\|x\| \geqslant \sqrt{2\alpha}$. Тогда в силу леммы 5.2 существует $\gamma > 0$ такое, что $x_2^4 + x_1^2 \geqslant \gamma$ и, следовательно, $W(x,t) \geqslant \alpha\gamma = \beta$. Из теоремы 5.4 можно тем самым сделать вывод о неустойчивости тривиального решения. Теорема 5.1 (см. замечание) в этом случае не работает, так как все элементы матрицы первого приближения равны нулю.

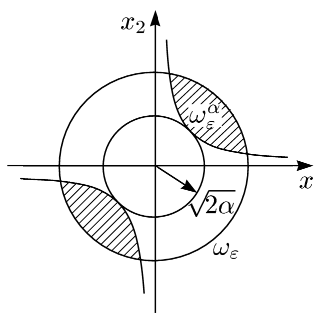

Рис. 12

Доказательство теоремы 5.4 проведем от противного. Предположим, что тривиальное решение устойчиво. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что $\|x(t)\| < \varepsilon$ для $t \geqslant 0$, если $\|x(0)\| < \delta(\varepsilon)$. Так как по условию а) теоремы 5.4 в ω_δ найдется точка x_0 такая, что $V(x_0) > \alpha$, возьмем ее за начальную: $x(0) = x_0$. Убедимся, что при всех $t \geqslant 0$ справедливо неравенство $V(x(t)) > \alpha$.

Действительно, пусть при некотором $t = t_1 > 0$ имеет место $V(x(t_1)) = \alpha$. Тогда, с одной стороны,

$$\Delta V = V(x(t_1)) - V(x(0)) < 0,$$

а с другой стороны,

$$\Delta V = t_1 \frac{dV}{dt}\bigg|_{t=t^*} = t_1 W(x(t^*), t^*).$$

Так как по предположению об устойчивости $x(t) \in \omega_\varepsilon$ при $t \geqslant 0$, то $x(t^*) \in \omega_\varepsilon$. Кроме того, $V(x(t^*)) \geqslant \alpha$. А тогда в силу условия б) теоремы 5.4 имеем $W(x(t^*), t^*) \geqslant \beta$ и, следовательно, $\Delta V \geqslant \beta t_1 > 0$. Противоречие приводит к заключению, что $V(x(t)) > \alpha$ для $t \geqslant 0$. Имеем тогда

$$V(x(t)) - V(x(0)) = W(x(t^{**}), t^{**})t \geqslant \beta t.$$

Отсюда следует, что $V(x(t)) \to \infty$ при $t \to \infty$, но, с другой стороны, $V(x(t))$ должно быть ограничено в силу того, что $x(t) \in \omega_\varepsilon$. Противоречие завершает доказательство теоремы.

Замечания.

1. Недостаток изложенных в настоящем параграфе методов заключается в том, что не существует достаточно общего конструктивного способа построения функций $V(x)$. Тем не менее для ряда весьма важных классов дифференциальных систем такое построение возможно.

2. Одним из классов дифференциальных систем, для которых возможно предложить конструктивный способ построения функции $V(x)$, является линейная система с постоянными коэффициентами. Теорему 5.1 об устойчивости по первому приближению можно доказать, используя функцию Ляпунова для линейной системы с постоянными коэффициентами, как это делается, например, в учебнике Л. С. Понтрягина [4].

3. Для дифференциальных уравнений, описывающих некоторые механические системы, роль функции Ляпунова играет потенциальная энергия $V(x)$. Сама система имеет вид $m\ddot{x} = -\operatorname{grad} V$. Положение равновесия в системе определяется условием $\operatorname{grad} V = 0$ (с математической точки зрения положение равновесия — это решение типа $x = \bar{x} = \text{const}$; соответствующим преобразованием переменных точку x всегда можно сделать началом координат), т. е. положение равновесия является стационарной точкой для потенциальной энергии. Если стационарная точка является

точкой минимума потенциальной энергии, то положение равновесия устойчиво. Действительно, в этом случае в окрестности начала координат $V(x)$ является положительно определенной функцией, а соответствующая функция $W(x,t)$, равная $(\operatorname{grad} V, f) = -(\operatorname{grad} V)^2$, очевидно, также удовлетворяет условиям теоремы 5.2.

§ 4. Исследование траекторий в окрестности точки покоя

В ряде вопросов возникает потребность, помимо исследования точки $(0,\ldots,0)$ фазового пространства на устойчивость, выяснить также расположение траекторий в окрестности этой точки.

Не ставя целью рассматривать этот вопрос во всей общности, ограничимся случаем $n = 2$ (фазовая плоскость) и линейной системой уравнений с постоянными коэффициентами (5.11):

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{5.39}$$

Эта система обладает тривиальным решением $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. С кинематической точки зрения это есть состояние покоя, поэтому отвечающая этому решению точка $(0,0)$ фазовой плоскости называется *точкой покоя.*

Заметим, что фазовую траекторию системы (5.39) можно рассматривать как интегральную кривую уравнения

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}{a_{21}x_1 + a_{22}x_2}.$$

В точке $(0,0)$ правая часть уравнения (5.40) разрывна, т.е. нарушено условие теоремы существования и единственности. Точка $(0,0)$ является согласно терминологии гл. 2 особой точкой. Поэтому априори через точку $(0,0)$ может не проходить ни одной интегральной кривой уравнения (5.40), а также может проходить более одной и даже бесконечно много интегральных кривых.

Как будет показано, расположение траекторий в окрестности точки $(0,0)$ определяется, как и свойство ее устойчивости или неустойчивости, характеристическими числами матрицы A.

Рассмотрим разные случаи.

а) Пусть характеристические числа λ_1 и λ_2 действительны, различны и одного знака. Положим для определенности, что $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. В этом случае решение системы (5.39) имеет вид (см. § 7 гл. 3)

$$x = C_1\alpha_{(1)}e^{\lambda_1 t} + C_2\alpha_{(2)}e^{\lambda_2 t}, \tag{5.41}$$

где $\alpha_{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha_{(i)1} \\ \alpha_{(i)2} \end{pmatrix}$ — некоторые постоянные столбцы — собственные векторы матрицы A, отвечающие собственным значениям λ_i $(i = 1, 2)$. Точка $(0, 0)$ является согласно теореме 5.1 асимптотически устойчивой, и $x \to 0$ при $t \to \infty$. Исследуем характер приближения более подробно. Имеем

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{C_1 \lambda_1 \alpha_{(1)2} e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 \alpha_{(2)2} e^{\lambda_2 t}}{C_1 \lambda_1 \alpha_{(1)1} e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 \alpha_{(2)1} e^{\lambda_2 t}}.$$

Отсюда видно, что если $C_1 \neq 0$, то

$$\lim_{t \to \infty} \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\alpha_{(1)2}}{\alpha_{(1)1}},$$

т. е. все интегральные траектории, кроме одной, отвечающей $C_1 = 0$, входят в $(0, 0)$ с общей касательной, уравнение которой $x_2 = \dfrac{\alpha_{(1)2}}{\alpha_{(1)1}} x_1$ (обозначим ее I). Заметим, что прямая I сама является одной из траекторий, а именно, той, которая отвечает $C_2 = 0$. Траектория, отвечающая $C_1 = 0$, также является прямой и имеет уравнение $x_2 = \dfrac{\alpha_{(2)2}}{\alpha_{(2)1}} x_1$ (обозначим ее II). Прямые I и II не совпадают, поскольку в силу линейной независимости векторов $\alpha_{(i)}$ имеем $\alpha_{(1)1}\alpha_{(2)2} - \alpha_{(2)1}\alpha_{(1)2} \neq 0$. Расположение прямых I и II и прочих траекторий схематически представлено на рис. 13. Стрелками обозначено направление возрастания t.

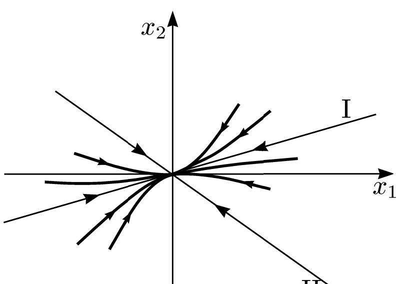

Рис. 13

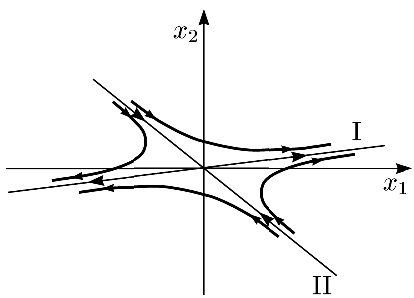

Рис. 14

Если $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, то характер расположения траекторий полностью сохраняется (можно устремить t к $-\infty$ и провести рассуждения, аналогичные проведенным выше для $t \to \infty$). Если стрелками по-прежнему указывать направление возрастания t, то направления стрелок теперь изменятся на противоположные по сравнению с рис. 13. Точка $(0,0)$ в этом случае неустойчива*). Точка покоя, отвечающая случаю действительных характеристических чисел λ_1, λ_2, не равных друг другу, но имеющих одинаковый знак, называется *узлом. Узел является асимптотически устойчивым при* $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ *и неустойчивым при* $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

б) Пусть характеристические числа λ_1 и λ_2 действительны, различны и разных знаков: $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Точка покоя в этом случае неустойчива. Представление (5.41) сохраняется. Из (5.41) видно, что через $(0,0)$ проходят две траектории: одна из них (обозначим ее I) отвечает $C_2 = 0$ и имеет уравнение $x_2 = \dfrac{\alpha_{(1)2}}{\alpha_{(1)1}} x_1$, а другая (обозначим ее II) отвечает $C_1 = 0$ и имеет уравнение $x_2 = \dfrac{\alpha_{(2)2}}{\alpha_{(2)1}} x_1$. Но на этом сходство с узлом кончается. Вдоль траектории II $x \to 0$ при $t \to \infty$, а вдоль траектории I $x \to 0$ при $t \to -\infty$ и стрелки, указывающие направление возрастания t, направлены от точки $(0,0)$. Нетрудно видеть, что прямая I является асимптотой при $t \to \infty$ для всех траекторий, кроме II, так как $\lim_{t\to\infty} \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{\alpha_{(1)2}}{\alpha_{(1)1}}$. Прямая II играет аналогичную роль при $t \to -\infty$. Расположение траекторий схематически представлено на рис. 14.

Точка покоя, отвечающая случаю действительных характеристических чисел противоположного знака, называется *седлом. Седло является неустойчивой точкой покоя.*

Траектории I и II, проходящие через седло, называются *сепаратрисами.*

в) Пусть характеристические числа матрицы A — комплексные. В силу действительности A они будут комплексно сопряженными, т. е. $\lambda_1 = \lambda_2^* = \lambda$. Соответствующие компоненты собственных векторов $\alpha_{(i)}$ будут также комплексно сопряженными, а так как мы рассматриваем действительные решения, то и произвольные постоянные должны быть комплексно сопряженными. Таким образом,

$$x_1 = C\alpha_1 e^{\lambda t} + C^* \alpha_1^* e^{\lambda^* t}, \quad x_2 = C\alpha_2 e^{\lambda t} + C^* \alpha_2^* e^{\lambda^* t}. \tag{5.42}$$

Подставляя сюда $\lambda = p + iq$, можно преобразовать эти выражения к виду

$$x_1 = e^{pt}(2\alpha\cos qt - 2\beta\sin qt), \quad x_2 = e^{pt}(2\gamma\cos qt - 2\delta\sin qt), \tag{5.43}$$

*)Иногда говорят, что точка устойчива при $t \to -\infty$. Определение устойчивости при $t \to -\infty$ можно дать совершенно аналогично определению устойчивости при $t \to \infty$, которое было дано в § 1 этой главы, и сформулировать теоремы, аналогичные теоремам § 2 и 3.

где $\alpha = \mathrm{Re}(C\alpha_1)$, $\beta = \mathrm{Im}(C\alpha_1)$, $\gamma = \mathrm{Re}(C\alpha_2)$, $\delta = \mathrm{Im}(C\alpha_2)$. Отсюда имеем

$$\rho^2 = x_1^2 + x_2^2 = e^{2pt}[(2\alpha\cos qt - 2\beta\sin qt)^2 + (2\gamma\cos qt - 2\delta\sin qt)^2].$$

Если $p = 0$ (характеристические числа — чисто мнимые), то x_1, x_2 и ρ являются периодическими функциями t периода $2\pi/q$. Это значит, что каждому C на фазовой плоскости отвечает некоторая замкнутая кривая. Эти кривые не пересекаются, так как всюду, кроме точки $(0,0)$, для (5.40) справедлива теорема единственности (рис. 15).

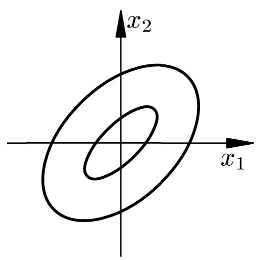

Рис. 15

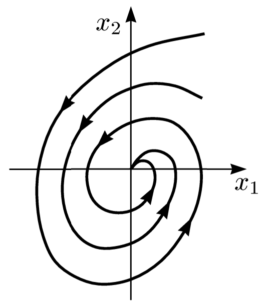

Рис. 16

Более детальное исследование показывает, что замкнутые кривые, о которых идет речь, являются эллипсами. В самом деле, определитель

$$\begin{vmatrix} 2\alpha & -2\beta \\ 2\gamma & -2\delta \end{vmatrix} \neq 0,$$

в противном случае существовало бы решение вида $x_1 = ax_2$ (a — вещественное). Так как x_1 и x_2 выражаются по формулам (5.42), то из равенства $x_1 = ax_2$ в силу линейной независимости $e^{\lambda t}$ и $e^{\lambda^* t}$ следует соотношение $\alpha_1 = a\alpha_2$. Собственный вектор $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ матрицы A, соответствующий собственному значению λ, находится из уравнения $(a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = 0$, которое при $\alpha_1 = a\alpha_2$ дает $(a_{11} - \lambda)a = -a_{12}$, что возможно лишь при вещественных λ.

Итак, систему (5.43) можно разрешить относительно $\cos qt$ и $\sin qt$ и, приравнивая сумму их квадратов единице, получить

$$(b_{11}x_1 + b_{12}x_2)^2 + (b_{21}x_1 + b_{22}x_2)^2 = 1.$$

Если же $p \neq 0$, то при изменении t на величину периода величина ρ уже не возвращается к прежнему значению, а уменьшается или увеличивается в соответствии с $p < 0$ или $p > 0$.

На фазовой плоскости получаются уже не замкнутые, а спиралевидные кривые. Если $p < 0$, то $\rho \to 0$ при $t \to \infty$, спираль сходится в точку $(0,0)$, которая является асимптотически устойчивой (рис. 16). Если же $p > 0$, то аналогичная картина имеет место при $t \to -\infty$, а с возрастанием t спираль расходится из точки $(0,0)$.

Точка покоя, отвечающая комплексно сопряженным характеристическим числам с отличной от нуля действительной частью p, называется *фокусом. При $p < 0$ фокус асимптотически устойчив, а при $p > 0$ неустойчив.*

Точка покоя, отвечающая чисто мнимым характеристическим числам, называется *центром. Центр является устойчивой, но не асимптотически устойчивой точкой покоя* (см. § 1). Мы не будем останавливаться на случае кратных характеристических чисел (см., например, [4, 5]), а также на случае, когда имеется характеристическое число, равное нулю.

Замечания.

1. Точка $(0,0)$ была названа выше точкой покоя для линейной системы (5.39). Дадим общее определение точки покоя, из которого будет ясно, что точка покоя не обязательно является началом координат, а для нелинейной системы точек покоя может быть несколько. Рассмотрим нелинейную автономную систему (5.19) при $n = 2$. Пусть $x_i = \bar{x}_i$ $(i = 1, 2)$ удовлетворяют системе уравнений $f_i(x_1, x_2) = 0$. Тогда, очевидно, те же $x_i = \bar{x}_i$ удовлетворяют дифференциальной системе (5.19), поскольку $\bar{x}_i$ не зависят от t. Это решение описывает состояние покоя и на фазовой плоскости изображается точкой. Точки фазовой плоскости, отвечающие решениям вида $x_i = \bar{x}_i = \mathrm{const}$, называются *точками покоя.* Соответствующей заменой переменных каждую точку покоя можно перевести в начало координат. Тогда, если f_i представима в виде (5.20), то система первого приближения (5.22) совпадает с (5.39).

Согласно теореме 5.1 в случае $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$ устойчивость или неустойчивость точки $(0,0)$ системы (5.19) обеспечивается теми же самыми требованиями на λ, которые обеспечивают устойчивость или неустойчивость точки $(0,0)$ для системы первого приближения (5.22), т. е. члены $R_{(2)i}$ не влияют на устойчивость или неустойчивость точки $(0,0)$. Что касается расположения траекторий, то точное исследование [4; § 30] показывает, что при наличии узла, седла или фокуса у системы (5.22) (во всех этих случаях $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$) качественный характер расположения траекторий системы (5.19) в достаточно малой окрестности точки $(0,0)$ будет тем же самым. Если же в точке $(0,0)$ система (5.22) имеет центр, то без дополнительного исследования членов $R_{(2)i}$ о характере расположения траекторий системы (5.19) ничего сказать нельзя.

2. Исследование расположения траекторий в окрестности точек покоя дает некоторую информацию относительно расположения фазовых траекторий на всей плоскости, но, конечно, полного решения этой сложной глобальной задачи не дает.

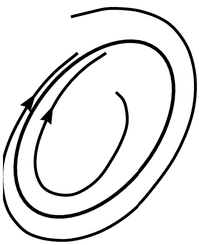

Рис. 17

Для изучения картины на фазовой плоскости, или, как иногда говорят, фазового портрета системы (5.19), важно исследовать не только точки покоя. Нередко встречаются замкнутые траектории (замкнутая траектория означает периодическое движение), обладающие тем свойством, что в окрестности таких траекторий нет других замкнутых траекторий, а все траектории как бы «наматываются» на эту единственную замкнутую траекторию, которая получила название предельного цикла, или, наоборот, «сматываются» с нее. Предельные циклы, таким образом могут быть устойчивыми и неустойчивыми (на рис. 17 изображен устойчивый предельный цикл). Исследование предельных циклов важно также с точки зрения существования устойчивых периодических режимов в физических системах.

Например, система

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - a\right) - x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_2\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - a\right) + x_1 \tag{5.44}$$

имеет точку покоя $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и предельный цикл $x_1^2 + x_2^2 = a^2$. В существовании такого цикла легко убедиться, перейдя к полярным координатам $x_1 = \rho\cos\theta$, $x_2 = \rho\sin\theta$, в которых система (5.44) принимает вид

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho(\rho - a), \quad \frac{d\theta}{dt} = 1.$$

3. С повышением размерности n фазовая картина существенно усложняется, возникают новые явления, для изучения которых развиты многочисленные методы.

Исследование фазового портрета системы дифференциальных уравнений является одной из задач так называемой качественной теории дифференциальных уравнений (см., например, [8, 24]).

ГЛАВА 6

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

При практическом решении задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, как правило, не удается получить решение в квадратурах, выраженное через элементарные или специальные функции (определенное исключение составляют линейные уравнения, рассмотренные в гл. 3). В то же время интенсивное применение дифференциальных уравнений в качестве математических моделей широкого круга естественно-научных задач требует разработки методов их исследования, позволяющих получить с достаточной точностью числовые характеристики рассматриваемой задачи. Наиболее эффективными здесь оказываются численные методы. Благодаря бурному развитию электронной вычислительной техники численные методы находят широкое применение в различных областях математики и ее приложениях, в частности, и при решении обыкновенных дифференциальных уравнений. За последнее время появилось достаточно большое количество учебных пособий, посвященных этой проблеме [21, 25]. В настоящей главе будут изложены лишь простейшие вопросы, относящиеся к численным методам решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

§ 1. Разностные методы решения начальной задачи

1. Разностная схема. Понятие сходимости. Наиболее распространенными и эффективными численными методами решения многих математических задач и, в частности, начальных и краевых задач для дифференциальных уравнений являются так называемые *разностные методы*, в основе которых лежит рассмотрение конечно-разностной задачи вместо исходной дифференциальной задачи. Последняя представляет собой задачу относительно большого, но конечного числа неизвестных, являющихся значениями функции дискретного аргумента, определенной в точках разбиения отрезка интегрирования. Если значения этой функции близки к значениям точного решения исходной задачи в соответствующих точках, то ее можно рассматривать как приближенное решение исходной задачи. Конечно-разностная задача, соответствующая исходной дифференциальной задаче, называется *разностной схемой*. Максимальное расстояние между точками разбиения отрезка интегрирования является параметром разностной схемы, поэтому исходной дифференциальной задаче сопоставляется семейство разностных схем, зависящих от этого параметра. В теории разностных схем решения дифференциальных уравнений основным является вопрос о сходимости семейства приближенных решений к точному решению исходной дифференциальной задачи при стремлении параметра разбиения к нулю. Здесь будет уточнено понятие сходимости приближенного решения к точному.

Следует подчеркнуть, что разностная схема представляет собой самостоятельный математический объект исследования. Теории разностных схем посвящена обширная учебная и специальная литература (см., например, [26]). Мы остановимся лишь на простейших общих понятиях.

Для того чтобы наглядно проиллюстрировать эти понятия, все рассмотрения будем проводить на примере численного решения начальной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, которую запишем в виде

$$\frac{dy}{dx} - f(x, y) = 0, \quad y(x_0) = y_0. \tag{6.1}$$

Как уже отмечалось, в основе применения разностных схем к дифференциальной задаче лежит построение приближенного решения, определенного лишь в конечном числе точек x_i отрезка $[x_0, X]$ интегрирования исходной дифференциальной задачи. Множество точек $\omega_k = \{x_i\}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, на котором ищется приближенное решение, называется *сеткой*. Отдельные точки этого множества — *узлы сетки*. Обозначим $h_i = x_{i+1} - x_i$ $(i = 0, 1, ..., n-1)$ расстояние между соседними узлами. Величину $h = \max_i h_i$ будем называть шагом сетки. Сетка может быть неравномерной ($h_i \neq \mathrm{const}$) и равномерной ($h_i = h = \mathrm{const}$). Очевидно, в последнем случае величина шага сетки на отрезке $[x_0, X]$ равна $h = |X - x_0|/n$. В дальнейшем, если не оговорено особо, будем рассматривать равномерные сетки.

Функция дискретного аргумента $u(x_i)$, определенная лишь в узлах сетки, называется *сеточной функцией*. Значения сеточной функции u на ω_k будем обозначать u_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Для определения сеточной функции u, являющейся приближенным решением исходной дифференциальной задачи (6.1), должна быть задана разностная схема — система уравнений, связывающих между собой значения сеточной функции u_i, заданных дополнительных условий и правой части уравнения в узлах x_i сетки ω_k.

Пусть дифференциальная задача имеет вид

$$Ly = \varphi(x). \tag{6.2}$$

Здесь символом L будем обозначать не только задание уравнения, но и задание дополнительных, например, начальных или краевых условий, записанное в определенном порядке. Через $\varphi(x)$ обозначены как правая часть уравнения, так и правые части дополнительных условий, записанные в соответствующем порядке. Так, задача (6.1) может быть записана в виде

$$Ly = \left\{ \begin{matrix} \dfrac{d}{dx}y - f(x,y) \\ y(x_0) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ y_0 \end{matrix} \right\} = \varphi(x). \tag{6.3}$$

Соответствующую разностную задачу будем записывать в виде

$$L_k u_k = \varphi_k, \tag{6.4}$$

где через L_k обозначается задание разностного уравнения и отвечающих ему дополнительных условий, а через φ_k — *входные данные* задачи, т. е. значения сеточной функции f_k — правой части разностного уравнения, — в совокупности с правыми частями дополнительных условий.

Задача определения сеточных функций u_k должна быть поставлена так, чтобы при стремлении шага h сетки к нулю сеточные функции сходились в определенном смысле к точному решению исходной задачи (6.3).

Для определения сходимости семейства сеточных функций к решению исходной задачи в пространстве $\{v_k\}$ сеточных функций необходимо задать расстояние между отдельными функциями как норму их разности. Понятие нормы в пространстве сеточных функций можно ввести по-разному. Чаще всего используется так называемая *равномерная* или *чебышевская норма*, определяемая выражением

$$\|v_h\| = \max_i |v_i|, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{6.5}$$

В ряде случаев применяется *среднеквадратичная* (*гильбертова*) *норма*

$$\|v_h\|_{l_2} = \Big(\sum_{i=0}^{n-1} v_i^2 \rho_i h_i\Big)^{1/2}, \tag{6.6}$$

где ρ_i — заданные весовые коэффициенты. В некоторых случаях применяются и другие нормы, например, энергетические.

Определение. Будем говорить, что *семейство сеточных функций* $\{u_k\}$ *сходится к точному решению* $y(x)$ исходной задачи, если

$$\lim_{h\to 0} \|u_h - [y]_h\| = 0, \tag{6.7}$$

где через $[y]_h$ обозначены значения функции $y(x)$ на сетке ω_h. Если, кроме того, существует такое h_0, что при $h \leqslant h_0$

$$\|u_h - [y]_h\| \leqslant Ch^k, \tag{6.8}$$

где C и k — некоторые постоянные, не зависящие от h, то будем говорить, что *имеет место сходимость порядка k в соответствующей норме.*

2. Разностная схема Эйлера. Рассмотрим простейшую дифференциальную задачу (6.1) или (6.3). Заменив выражение для производной в точке x_n приближенным отношением

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} \qquad (x_{n+1} - x_n = h),$$

сопоставим (6.3) следующую разностную задачу:

$$L_h u_h = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{u_{n+1} - u_n}{h} - f(x_n, u_n) \\ u_0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ y_0 \end{array} \right\} = f_h. \tag{6.9}$$

В данном случае значения сеточной функции вычисляются очень просто. Имеем последовательно

$$\begin{aligned} &u_0 = y_0, \\ &u_1 = u_0 + hf(x_0, u_0), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &u_k = u_{k-1} + hf(x_{n-1}, u_{n-1}), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Такого типа схемы с последовательным вычислением $u_0, u_1, \dots$ называются *явными схемами.*

Нетрудно в описанном алгоритме заметить сходство с построением ломаной Эйлера в гл. 2. Разница заключается в том, что теперь в рассмотрение включаются лишь вершины этой ломаной, а шаг является постоянным. Разностная схема (6.9) называется *разностной схемой Эйлера с постоянным шагом* для задачи (6.3).

Доказанная в гл. 2 теорема 2.2 дает возможность утверждать сходимость семейства сеточных функций, построенных по схеме Эйлера, к решению исходной задачи (6.3), так как в силу этой теоремы, очевидно, выполняется условие (6.7) в норме (6.5).

Замечание. Сходимость сеточных функций, определяемых простейшей разностной схемой Эйлера, к точному решению явилась следствием результатов гл. 2. Это связано с тем, что в самом доказательстве существования решения задачи (6.1) в гл. 2 использовались ломаные Эйлера, получаемые из сеточной функции соединением точек, отвечающих на графике значениям сеточной функции, прямолинейными отрезками. В более сложных случаях разностных схем нужно убедиться в существовании решения соответствующей разностной задачи, прежде чем выяснять вопрос сходимости.

Оценим теперь порядок сходимости при $h \to 0$ последовательности сеточных функций, построенных по разностной схеме Эйлера, пользуясь опять-таки результатами и методами гл. 2. В гл. 2 было доказано, что как решение дифференциальной (6.3), так и решение разностной (6.9) задач определены на сегменте $[x_0, X]$ и не выходят из области D, где задана функция $f(x,y)$. Пусть $f(x,y)$ непрерывна в области D по совокупности аргументов и удовлетворяет условию Липшица по каждому из переменных, т. е. пусть имеют место оценки ($(x,y) \in D$, M и N не зависят от x, y):

$$\begin{gathered} |f(x,y)| < M, \quad |f(x_1,y) - f(x_2,y)| \leqslant N|x_1 - x_2|, \\ |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant N|y_1 - y_2|. \end{gathered} \tag{6.10}$$

В дальнейшем, исследуя другие разностные схемы для задачи (6.3), мы будем *предполагать*, что решение разностной задачи не выходит из D.

Итак, оценим разность между сеточной функцией, отвечающей точному решению задачи (6.1), и сеточной функцией, построенной по разностной схеме Эйлера. Для этого достаточно оценить разность между точным решением $y(x)$ задачи (6.1) и ломаной Эйлера $\bar{y}_{(n)}(x)$, которая удовлетворяет уравнению и начальному условию

$$\frac{d\bar{y}_{(n)}}{dx} - f(x_i, \bar{y}_{(n)}(x_i)) = 0, \quad x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}, \quad \bar{y}_{(n)}(x_0) = y_0. \tag{6.11}$$

Составим разность $z(x)$ между точным решением $y(x)$ исходной задачи (6.1) и ломаной $\bar{y}_{(n)}(x)$:

$$z(x) = y(x) - \bar{y}_{(n)}(x). \tag{6.12}$$

В силу (6.1), (6.11) и (6.12) получим

$$\frac{dz}{dx} = f(x, y(x))) - f(x_i, \bar{y}_{(n)}(x_i)), \quad z(x_0) = 0. \tag{6.13}$$

Оценим правую часть (6.13), пользуясь условиями (6.10). Так как

$$\begin{aligned} f(x,y(x)) - f(x_i,\bar{y}_{(n)}(x_i)) &= f(x,y(x)) - f(x_i,y(x)) + \\ &+ f(x_i,y(x)) - f(x_i,\bar{y}_{(n)}(x)) + f(x_i,\bar{y}_{(n)}(x)) - f(x_i,\bar{y}_{(n)}(x_i)), \end{aligned}$$

то согласно обозначению (6.12) при $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$

$$|f(x, y(x)) - f(x_i, \bar{y}_{(n)}(x_i))| < \\ < N|x - x_i| + N|z(x)| + N|\bar{y}_{(n)}(x) - \bar{y}_{(n)}(x_i)|. \quad (6.14)$$

Оценим последнее слагаемое в формуле (6.14). Согласно (6.11)

$$|\bar{y}_{(n)}(x) - \bar{y}_{(n)}(x_i)| = |x - x_i|\,|f(x_i, \bar{y}_{(n)}(x_i))|,$$

откуда в силу (6.10) и условия $|x - x_i| \leqslant h$ получим

$$|\bar{y}_{(n)}(x) - \bar{y}_{(n)}(x_i)| < hM. \quad (6.15)$$

Подставляя (6.15) в (6.14), получим для производной $\frac{dz}{dx}$ окончательную оценку

$$\left|\frac{dz}{dx}\right| < N|z(x)| + hN(1 + M) \quad (6.16)$$

на любом участке разбиения $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$. Согласно лемме о дифференциальных неравенствах отсюда следует

$$|z(x)| < h(1 + M)(e^{N(x - x_0)} - 1), \quad x_0 < x < X. \quad (6.17)$$

Из этой формулы видно, что разность между точным решением и ломаной Эйлера стремится к нулю как h (остальные величины в (6.17) фиксированы), тем самым выполняется (6.8) при $k = 1$. Это позволяет сделать вывод, что разностная схема Эйлера имеет сходимость первого порядка.

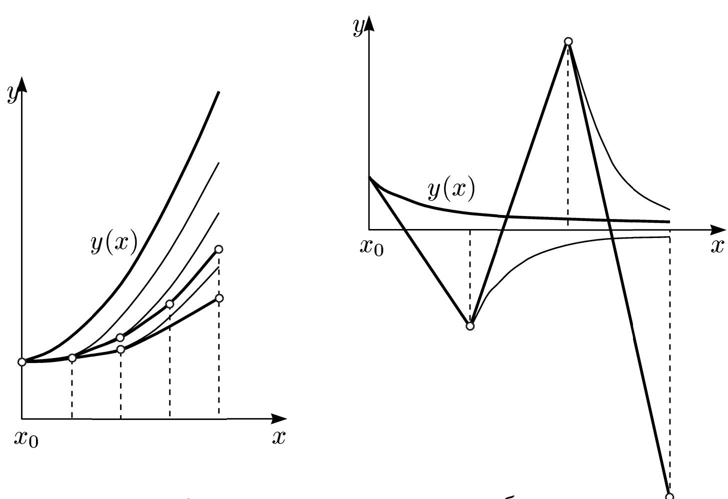

Рис. 18

Замечание. Полученные результаты справедливы и в случае неравномерной сетки $h_i \neq \text{const}$, $h = \max_i h_i$.

На рис. 18,*а* приведены интегральная кривая, представляющая решение начальной задачи для линейного уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \alpha y, \quad y(x_0) = y_0, \quad \alpha = \text{const},$$

и ломаные Эйлера, полученные для различных значений шага h. Расхождение носит экспоненциальный характер, что соответствует оценке (6.17); при $h \to 0$ его величина на конечном отрезке $[x_0, X]$ равномерно стремится к нулю. Однако при достаточно крупном шаге h приближенное решение, построенное по методу Эйлера, может существенно отличаться от точного. В частности, при $\alpha < 0$ и $h\alpha < -2$ приведенная на рис. 18,*б* ломаная Эйлера ничего общего не имеет с точным решением.

Сеточная функция u_h и решение дифференциального уравнения y удовлетворяют уравнениям разной природы. Поэтому в общем случае не удается повторить рассмотрения, приводящие для простейшей схемы Эйлера к оценке (6.17). В частности, для сеточной функции u_h, являющейся решением достаточно сложной разностной схемы, трудно предложить такой алгоритм интерполяции, чтобы полученная кривая являлась интегральной кривой дифференциального уравнения, в определенном смысле близкого к исходному, и можно было бы воспользоваться методом дифференциальных неравенств для оценки разности между решением исходного и полученного дифференциальных уравнений.

В общем случае для оценки сходимости приходится пользоваться другими путями, вводя понятия *аппроксимации* и *устойчивости* разностной схемы.

3. Порядок аппроксимации разностной схемы. Для рассмотрения понятия порядка аппроксимации разностной схемы потребуется ввести норму φ_h — правой части разностной схемы (6.4). Как уже отмечалось выше, φ_h представляет собой правую часть уравнения — сеточную функцию f_h в совокупности с дополнительными условиями для искомой сеточной функции u_h. Они могут быть и начальными, и краевыми. Занумеруем их в определенном порядке. Соответствующие правые части пусть будут $g_1, \ldots, g_q$.

Обозначим $||u_h||_0 = \max_i |g_i|$ и введем норму $||\varphi_h||_1$, полагая

$$||\varphi_h||_1 = \max\{||f_h||, ||u_h||_0\}. \tag{6.18}$$

Пусть разностная схема (6.4) однозначно разрешима при всех $h \leqslant h_0$. Если значения $[y]_h$ решения $y(x)$ исходной дифференциальной задачи на сетке ω_h удовлетворяют разностной схеме (6.4), то, найдя решение разностной схемы u_h, получим значение точного решения в узлах сетки $[y]_h = u_h$.

С таким положением мы встречаемся крайне редко. Как правило, при подстановке значений $[y]_h$ в разностную схему (6.4) мы не получаем тождества, а (6.4) удовлетворяется с некоторой невязкой

$$L_h[y]_h = \varphi_h + \delta\varphi_h. \tag{6.19}$$

Величина невязки $\delta\varphi_h$ разностной схемы на решении исходной задачи и является характеристикой аппроксимации разностной схемы исходной задачи.

Замечания.

1. Отметим принципиальное отличие введенного понятия невязки аппроксимации разностной схемой дифференциальной задачи от использованного в § 2 гл. 2 понятия невязки при подстановке приближенного решения в виде ломаной Эйлера в исходное дифференциальное уравнение. Это отличие связано с тем, что ломаная Эйлера является непрерывной и кусочно дифференцируемой функцией, которую можно подставить в левую часть исходного дифференциального уравнения, в то время как решение разностной схемы есть функция дискретного аргумента, определенная лишь в узлах сетки. Решение исходной задачи определено всюду на отрезке интегрирования, и его значения $[y]_h$ в узлах сетки можно подставить в разностную схему (6.4) и, используя информацию о гладкости точного решения исходной задачи, оценить величину невязки разностной схемы на точном решении.

2. Функция дискретного аргумента $[y]_h$ очевидно является решением разностной схемы (6.4) с видоизмененной, или, как говорят, возмущенной правой частью.

Перейдем теперь к определению понятия порядка аппроксимации разностной схемы на решении дифференциальной задачи.

Определение. Будем говорить, что разностная схема имеет *k-й порядок аппроксимации на решении исходной задачи*, если существует такое h_0, что при $h \leqslant h_0$

$$||L_h[y]_h - \varphi_h||_1 < Ch^k, \tag{6.20}$$

где C и k — некоторые постоянные, не зависящие от h.

Определим порядок аппроксимации схемы Эйлера (6.9), предполагая, что функция $f(x, y)$ в уравнении (6.1) имеет первые непрерывные частные производные по обоим аргументам в прямоугольнике D. В этом случае точное решение $y(x)$ исходной задачи, очевидно, имеет вторую непрерывную производную. Это позволяет записать разложение

$$y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i + \theta h), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1. \tag{6.21}$$

В силу (6.21) при подстановке точного решения $y(x)$ задачи (6.1) в левую часть уравнения (6.9) получим

$$y'(x_i) + \frac{h}{2}y''(x_i + \theta h) - f(x_i, y(x_i)) = \frac{h}{2}y''(x_i + \theta h) \tag{6.22}$$

(первое и третье слагаемые в левой части (6.22) взаимно уничтожаются, поскольку $y(x)$ является точным решением уравнения (6.1)). Тем самым невязка в уравнении имеет первый порядок. Решение разностной задачи (6.9) удовлетворяет тому же начальному условию, что и решение задачи (6.3). Отсюда следует, что схема Эйлера аппроксимирует задачу (6.3) с первым порядком.

Замечание. Первый порядок аппроксимации схемы Эйлера связан с тем, что в этом методе первая производная $y'(x_i)$ аппроксимируется разностным отношением $(y_{i+1} - y_i)/h$. Легко видеть, что, выбирая другие приближенные формулы для первой производной, можно повысить порядок аппроксимации.

Действительно, заменим первую производную симметричным разностным отношением в соседних точках

$$(y_{i+1} - y_{i-1})/2h. \tag{6.23}$$

Предполагая непрерывность третьих производных решения (что будет иметь место при соответствующих условиях гладкости функции $f(x, y)$ в правой части уравнения (6.1)), будем иметь

$$\begin{aligned} y(x_i + h) &= y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i + \theta_1 h), \\ y(x_i - h) &= y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) - \frac{h^3}{6}y'''(x_i + \theta_2 h). \end{aligned} \tag{6.24}$$

Аппроксимируем задачу (6.3) разностной схемой (y_1 — значение сеточной функции в первом узле пока оставим неопределенным, но это значение необходимо задать, чтобы последовательно определить $u_2, u_3, \ldots$)

$$L_h u_h = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - f_i \\ u_0 \\ u_1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ y_0 \\ y_1 \end{array} \right\} \tag{6.25}$$

Проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, получим, что разностное уравнение (6.25) аппроксимирует исходное уравнение (6.1) со вторым порядком. Чтобы определить порядок аппроксимации условия в первом узле, опять воспользуемся разложением точного решения по формуле Тейлора

$$y(x_0+h)-y_1=y(x_0)+hy'(x_0)+\frac{h^2}{2}y''(x_0+\theta h)-y_1=$$
$$=y_0+hf(x_0,y_0)+\frac{h^2}{2}y''(x_0+\theta h)-y_1. \tag{6.26}$$

Из (6.26) следует, что если выбрать

$$y_1=y_0+hf(x_0,y_0), \tag{6.27}$$

то и второе начальное условие в (6.25) аппроксимируется со вторым порядком. Первое начальное условие выполняется точно. Отсюда следует, что при выполнении дополнительного условия (6.27) разностная схема (6.25) аппроксимирует исходную задачу со вторым порядком.

Естественно предположить, что для того, чтобы решение u_h разностной схемы было близко́ к решению исходной задачи, невязка $\delta\varphi_h$ должна быть достаточно малой. Возникает вопрос, является ли малость невязки $\delta\varphi_h$ достаточной для того, чтобы обеспечить близость u_h к решению исходной задачи, иными словами, обеспечивается ли сходимость разностной схемы, если имеет место аппроксимация? Оказывается, одной аппроксимации, вообще говоря, недостаточно, чтобы разностная схема давала приближенное решение дифференциальной задачи. Помимо аппроксимации нужны еще какие-то дополнительные свойства разностной схемы. Таким свойством является так называемая *устойчивость разностной схемы.*

4. Устойчивость разностной схемы. Перейдем к определению устойчивой разностной схемы. Рассмотрим разностную схему (6.4) и соответствующую так называемую возмущенную задачу

$$L_h\bar{u}_h=\varphi_h+\delta\varphi_h, \tag{6.28}$$

где $\delta\varphi_h$ называется *возмущением* входных данных. В дальнейшем будем рассматривать тот случай, когда возмущенная задача (6.28) однозначно разрешима при достаточно малом возмущении, т. е. существуют такие δ_0 и h_0, что при $||\delta\varphi_h||_1<\delta_0$ и $h<h_0$ задача (6.28) имеет решение, и притом единственное. Погрешностью решения схемы (6.4) по-прежнему назовем выражение $\delta u_h=\bar{u}_h-u_h$. Величина $\delta\varphi_h$, как и φ_h, оценивается в норме

$$||\delta\varphi_h||_1=\max\{||\delta f_h||,||\delta u_h||_0\}, \tag{6.29}$$

где $||\delta f_h||$ — норма возмущения правой части уравнения, а $||\delta u_h||_0$ — норма возмущения дополнительных условий. Дадим определение устойчивой разностной схемы.

Определение. Схема (6.4) называется *устойчивой по начальным условиям и правой части уравнения* (или просто *устойчивой*), если существует такая постоянная h_0, что при $h < h_0$ для нормы погрешности решения выполняется неравенство

$$||\delta u_h|| < C||\delta \varphi_h||_1, \tag{6.30}$$

где постоянная C не зависит от h.

Данное определение, очевидно, означает непрерывную зависимость решения разностной схемы (6.4) от входных данных задачи — начальных условий и правой части уравнения: малое изменение входных данных приводит к малому изменению решения.

Замечание. В случае линейного оператора L_h введенное определение устойчивости разностной схемы (6.4) эквивалентно требованию, чтобы схема (6.28) была однозначно разрешима при достаточно малом возмущении $\delta\varphi_h$ и при $h < h_0$ выполнялось условие

$$||u_h|| \leqslant C||\varphi_h||_1, \tag{6.31}$$

где C — некоторая не зависящая от h постоянная [14].

Перейдем теперь к доказательству устойчивости схемы Эйлера (6.9) в случае общей задачи (6.1). Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в области D и удовлетворяет условию Липшица по переменной y, т. е. имеют место оценки

$$|f(x,y)| < M, \quad |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant N|y_1 - y_2|, \quad (x,y) \in D. \tag{6.32}$$

Возмущенная разностная схема, соответствующая схеме (6.9), имеет вид

$$L_h\bar{u}_h = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i}{h} - f_i \\ \bar{u}_0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \delta f_i \\ y_0 + \varepsilon_0 \end{array} \right\}, \tag{6.33}$$

где $f_i = f(x_i, \bar{u}_i)$, δf_i — возмущение правой части разностного уравнения, ε_0 — возмущение начального условия. Для погрешности решения $\delta u_h = \bar{u}_h - u_h$, очевидно, получим

$$\frac{\delta u_{i+1} - \delta u_i}{h} - f(x_i, \bar{u}_i) + f(x_i, u_i) = \delta f_i, \quad \delta u_0 = \varepsilon_0. \tag{6.34}$$

Отметим, что согласно введенным выше определениям

$$|\delta f_i| \leqslant ||\delta f_h||, \quad ||\delta u_h||_0 = |\varepsilon_0|. \tag{6.35}$$

Из (6.34) в силу оценок (6.32) и (6.35) получим

$$
\begin{aligned}
|\delta u_{i+1}| &\leqslant |\delta u_i| + hN|\delta u_i| + h\|\delta f_h\| = \\
&= (1 + hN)|\delta u_i| + h\|\delta f_h\| \leqslant \\
&\leqslant (1 + hN)^2|\delta u_{i-1}| + h\{(1 + hN) + 1\}\|\delta f_h\|.
\end{aligned} \tag{6.36}
$$

Применяя этот процесс последовательных оценок, после $(i+1)$-го шага найдем

$$
\begin{aligned}
|\delta u_{i+1}| &\leqslant (1 + hN)^{i+1}|\varepsilon_0| + h\{(1 + hN)^i + \dots + 1\}\|\delta f_h\| \leqslant \\
&\leqslant (1 + hN)^{i+1}\|\delta u_h\|_0 + \frac{1}{N}(1 + hN)^{i+1}\|\delta f_h\|,
\end{aligned} \tag{6.37}
$$

откуда получим

$$
\|\delta u_h\| \leqslant (1 + hN)^n\Big(\|\delta u_h\|_0 + \frac{1}{N}\|\delta f_h\|\Big). \tag{6.38}
$$

Так как $X - x_0 = nh$, то в силу неравенства

$$
(1 + hN)^{(X - x_0)/h} \leqslant e^{N(X - x_0)}
$$

окончательно при любом h будем иметь

$$
\|\delta u_h\| \leqslant e^{N(X - x_0)}\Big(\|\delta u_h\|_0 + \frac{1}{N}\|\delta f_h\|\Big) < C\|\delta\varphi_h\|_1, \tag{6.39}
$$

что и доказывает устойчивость разностной схемы (6.9).

5. Теорема о сходимости. Введенные выше понятия порядка аппроксимации и устойчивости разностной схемы позволяют доказать следующую теорему, играющую фундаментальную роль при исследовании сходимости разностных схем.

Теорема 6.1. *Если разностная схема (6.4) устойчива и аппроксимирует задачу (6.2) с порядком k, то решения u_h при $h \to 0$ сходятся к решению $y(x)$ дифференциальной задачи, причем порядок сходимости также равен k, т. е. имеет место оценка*

$$
\|u_h - [y]_h\| < Ch^k, \tag{6.40}
$$

где постоянная C не зависит от h.

Доказательство. Обозначим разность значений сеточных функций u_h и $[y]_h$ через z_h:

$$
z_h = u_h - [y]_h. \tag{6.41}
$$

В силу определения порядка аппроксимации

$$L_h[y]_h = \varphi_h + \delta\varphi_h, \tag{6.42}$$

где для невязки $\delta\varphi_h$ имеет место оценка $\|\delta\varphi_h\|_1 < C_1 h^k$. Так как $[y]_h$ является решением возмущенной разностной схемы (6.42), то в силу устойчивости разностной схемы (6.4) и оценки (6.30), входящей в определение устойчивости, получим

$$\|z_h\| < C\|\delta\varphi_h\|_1 \leqslant CC_1 h^k. \tag{6.43}$$

Сохранив для произведения постоянных CC_1 обозначение C, получим соотношение (6.40). Теорема доказана.

Выше было показано, что схема Эйлера устойчива и аппроксимирует задачу (6.1) с первым порядком. Из доказанной теоремы следует, что семейство решений u_h, полученных по схеме Эйлера, при $h \to 0$ сходится к точному решению задачи (6.1) также с первым порядком. Этот факт был установлен в п. 2 с помощью прямых оценок.

Заметим, что в оценках (6.30) и (6.40) не зависящая от h постоянная C может иметь достаточно большое значение. Так, в случае схемы Эйлера постоянная C имеет порядок $e^{\alpha(x-x_0)}$ и при $\alpha > 0$ достаточно велика.

Рассмотрим в качестве примера, показывающего важность понятия устойчивости для сходимости разностных схем, задачу (6.1) для следующего линейного однородного уравнения с постоянным коэффициентом:

$$\frac{dy}{dx} + \alpha y = 0, \quad y(x_0) = y_0. \tag{6.44}$$

Сопоставим этой задаче следующую разностную схему:

$$L_h u_h = \left\{ \begin{array}{c} 4\dfrac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} - 3\dfrac{u_{n+1} - u_n}{h} + \alpha u_n \\ u_0 \\ u_1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ y_0 \\ y_0 \end{array} \right\}. \tag{6.45}$$

Нетрудно убедиться, как это было сделано выше для схем (6.9) и (6.25), что разностная схема (6.45) аппроксимирует решение исходной задачи с первым порядком.

А теперь построим точное решение разностной задачи (6.45). Перепишем уравнение из (6.45) в виде

$$u_{n+1} - (3 + \alpha h)u_n + 2u_{n-1} = 0. \tag{6.46}$$

Найдем частное решение этого разностного уравнения в форме $u_n = \lambda^n$, где λ — пока неизвестная постоянная (это делаем по аналогии с отысканием частного решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в форме $e^{\lambda x}$). Имеем тогда $\lambda^{n+1} - (3 + \alpha h)\lambda^n + 2\lambda^{n-1} = 0$ или

$$\lambda^2 - (3 + \alpha h)\lambda + 2 = 0. \tag{6.47}$$

Полученное уравнение называется характеристическим (опять же по аналогии с теорией дифференциальных уравнений) для разностного уравнения (6.46). Находя из (6.47)

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{3 + \alpha h - \sqrt{1 + 6\alpha h + \alpha^2 h^2}}{2}, \\ \lambda_2 &= \frac{3 + \alpha h + \sqrt{1 + 6\alpha h + \alpha^2 h^2}}{2}, \end{aligned} \tag{6.48}$$

получим два частных решения уравнения (6.46) в виде $u_{n(1)} = \lambda_1^n$, $u_{n(2)} = \lambda_2^n$. Попытаемся удовлетворить условиям в нулевом и в первом узле, т. е. условиям $u_0 = y_1$, $u_1 = y_0$, взяв линейную комбинацию этих решений (являющуюся также решением в силу линейности уравнения)

$$u_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n. \tag{6.49}$$

Имеем $C_1 + C_2 = y_0$, $C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = y_0$. Отсюда

$$C_1 = \frac{y_0(\lambda_2 - 1)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad C_2 = \frac{y_0(\lambda_1 - 1)}{\lambda_1 - \lambda_2}. \tag{6.50}$$

Итак, формула (6.49), где C_1 и C_2 определены формулами (6.50), дает решение разностной задачи (6.45). Нетрудно убедиться, что оно является единственным, так как, предполагая, что имеются два решения задачи (6.45), получим, что их разность в силу линейности является решением опять-таки задачи (6.45), где $y_0 = 0$. Отсюда последовательно получим, что все значения сеточной функции, отвечающей разности предполагаемых различных решений, равны нулю.

Исследуем построенное решение задачи (6.45) при $h \to 0$. Пользуясь известными методами анализа, нетрудно получить, что при достаточно малых h*)

$$\lambda_1 = 1 - \alpha h + \mathcal{O}(h^2), \quad \lambda_2 = 2 + 2\alpha h + \mathcal{O}(h^2),$$
$$C_1 = \frac{y_0(1 + \mathcal{O}(h))}{1 + \mathcal{O}(h)}, \qquad C_2 = \frac{y_0(\alpha h + \mathcal{O}(h^2))}{1 + \mathcal{O}(h)}.$$

---

*)Символом $\mathcal{O}(h^k)$ обозначается величина, модуль которой меньше Ch^k, где C — не зависящая от h постоянная.

При $h \to 0$ и $\alpha > 0$ имеем $C_1 \to y_0$, а $|\lambda_1^n| < 1$, и поэтому $C_1\lambda_1^n = C_1\lambda_1^{(x_n-x_0)/h}$ ограничено при $h \to 0$. В то же время $\lambda_2^n > 2^n$, и

$$|C_2\lambda_2^n| > \frac{|y_0|}{2}\alpha h 2^n = \frac{|y_0|}{2}\alpha h 2^{(x_n-x_0)/h}. \tag{6.51}$$

Чтобы получить посредством разностной схемы решение в фиксированной точке x отрезка $[x_0, X]$, нужно сделать такое число n шагов, чтобы $x_{n-1} < x \leqslant x_n$, а для такого n величина $h2^{(x_n-x_0)/h} \geqslant h2^{(x-x_0)/h} \to \infty$ при $h \to 0$, так как x фиксировано; т. е. при фиксированном значении $x \in [x_0, X]$ второе слагаемое в формуле (6.49) неограниченно возрастает по абсолютной величине. Тем самым сеточная функция, отвечающая разностной схеме (6.45), не может сходиться к решению дифференциальной задачи (6.3) в смысле (6.7).

Итак, схема (6.45) обеспечивает первый порядок аппроксимации, но не сходится к решению дифференциальной задачи. Легко видеть, что этот результат связан с отсутствием устойчивости данной разностной схемы. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть возмущенную задачу, в которой возмущаются только начальные данные:

$$L_h\bar{u}_h = \left\{ \begin{array}{c} 4\dfrac{\bar{u}_{n+1} - \bar{u}_{n-1}}{2h} - 3\dfrac{\bar{u}_{n+1} - \bar{u}_n}{h} + \alpha\bar{u}_n \\ \bar{u}_0 \\ \bar{u}_1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ y_0 + \varepsilon \\ y_0 + \varepsilon \end{array} \right\}.$$

Тогда для погрешности решения $\delta u_h = \bar{u}_h - u_h$ получим формулу (6.49), в которой y_0 следует заменить на ε. Из оценки (6.51) следует, что при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ величина $|C_2\lambda_2^n|$ неограниченно растет при $h \to 0$, что и доказывает неустойчивость данной разностной схемы.

6. Метод Рунге–Кутта. Как мы уже отмечали, схема Эйлера имеет лишь первый порядок сходимости, и для получения высокой точности по этой схеме приходится вести вычисления с очень мелким шагом, что приводит к значительному росту времени счета. Поэтому естественно искать схемы, обладающие более высокими порядками сходимости. Одним из классов таких схем являются схемы Рунге–Кутта. В основе этого метода лежат следующие соображения. Рассмотрим тождество $y'(x) = f(x, y(x))$. Согласно формуле Лагранжа о конечных приращениях на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ существует такая точка x^*, что

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = (x_{i+1} - x_i)y'(x^*) = hf(x^*, y(x^*)). \tag{6.52}$$

Однако значение x^* нам неизвестно. В схеме Эйлера положено $x^* = x_i$, что и дает всего лишь первый порядок точности. Основная идея метода Рунге–Кутта заключается во введении в разностную схему ряда дополнительных параметров, уточняющих приближенное определение значения x^*.

Будем по-прежнему рассматривать начальную задачу (6.1) (или (6.3)):

$$Ly = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{d}{dx}y - f(x,y) \\ y(x_0) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ y_0 \end{array} \right\}. \tag{6.53}$$

Условия гладкости функции $f(x,y)$ будут сформулированы ниже. Сопоставим задаче (6.1) разностную схему

$$Ly = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{u_{i+1}-u_i}{h} - (p_1K_1 + \cdots + p_lK_l) \\ u_0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ y_0 \end{array} \right\}, \tag{6.54}$$

где

$$\begin{aligned} &K_1 = f(x_i, u_i), \\ &K_2 = f(x_i + \alpha_1 h, u_i + \alpha_1 hK_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &K_l = f(x_i + \alpha_{l-1}h, u_i + \alpha_{l-1}hK_{l-1}), \end{aligned} \tag{6.55 }$$

а $p_1, \ldots, p_l, \alpha_1, \ldots, \alpha_{l-1}$ — некоторые параметры, выбором которых можно обеспечить требуемый порядок аппроксимации схемы (6.54) на решении задачи (6.53).

В частном случае при $l = 1$, $p = 1$ схема (6.54) переходит в схему Эйлера (6.9), имеющую первый порядок аппроксимации. Покажем, что при $l = 2$ можно так выбрать параметры p_1, p_2 и α_1, что схема (6.54) будет иметь второй порядок аппроксимации. Пусть функция $f(x,y)$ имеет в D непрерывные частные производные до второго порядка по обоим аргументам, что достаточно для существования непрерывной третьей производной от решения. Тогда решение задачи (6.53) может быть представлено по формуле Тейлора

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x^*). \tag{6.56}$$

Подставляя это выражение в схему (6.54), получим

$$\begin{aligned} \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} &- (p_1K_1 + p_2K_2) = \\ &= y'(x_i) + \frac{h}{2}y''(x_i) + O(h^2) - p_1 f(x_i, y(x_i)) - \\ &\qquad - p_2 f\bigl(x_i + \alpha_1 h, y(x_i) + \alpha_1 hf(x_i, y(x_i))\bigr). \end{aligned} \tag{6.57}$$

Воспользовавшись разложением

$$\begin{aligned} f(x_i + \alpha_1 h, &\, y(x_i) + \alpha_1 hf(x_i, y(x_i))) = \\ &= f(x_i, y(x_i)) + \alpha_1 h\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y(x_i)) + \\ &\qquad + \alpha_1 hf(x_i, y(x_i))\frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y(x_i)) + O(h^2) \end{aligned} \tag{6.58}$$

и очевидным соотношением

$$y''(x_i) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y(x_i)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y(x_i))y'(x_i) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y(x_i)) + f(x_i, y(x_i))\frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y(x_i)), \quad (6.59)$$

перепишем (6.57) в виде

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - (p_1 K_1 + p_2 K_2) =$$
$$= y'(x_i) - (p_1 + p_2)f(x_i, y(x_i)) +$$
$$+ hy''(x_i)(1/2 - \alpha_1 p_2) + O(h^2). \quad (6.60)$$

Отсюда следует, что при

$$p_1 + p_2 = 1, \quad \alpha_1 p_2 = 1/2 \quad (6.61)$$

схема (6.54) при $l = 2$ имеет второй порядок аппроксимации. При этом α_1 может быть выбрано произвольно. Наиболее широко применяются схемы (6.54) с $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_1 = 1/2$. Заметим, что путем выбора α_1 повысить порядок аппроксимации схемы (6.54) при $l = 2$ нельзя.

При $\alpha_1 = 1$ из (6.61) получим $p_1 = p_2 = 1/2$, и схема (6.54) принимает вид

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{1}{2}\big[f(x_i, u_i) + f(x_i + h, u_i + hf(x_i, u_i))\big] = 0. \quad (6.62)$$

Геометрическая интерпретация этой формулы ясна из рис. 19. Сначала по методу Эйлера находим точку $\bar{y}_{i+1} = u_i + hf(x_i, u_i)$, затем находим среднее значение угла наклона касательной к интегральным кривым на шаге h: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}(u_i' + \bar{y}_{i+1}')$ и по нему уточняем значение u_{i+1}. Аналогичные рассуждения легко провести и для случая $\alpha = 1/2$. Подобные схемы обычно носят название «предиктор-корректор».

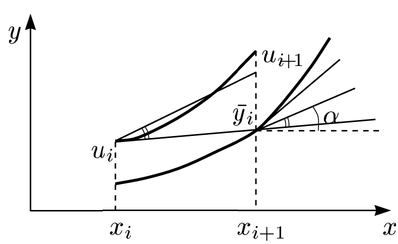

Рис. 19

Мы рассмотрели схемы со вторым порядком аппроксимации. Аналогичные рассмотрения могут быть проведены и для схем более высокого порядка ($l > 2$). При этом приходится налагать на функцию $f(x, y)$ все более высокие требования гладкости. Наиболее широкие практические применения находят схемы четвертого порядка. В большинстве библиотек стандартных программ для ЭВМ используется следующая схема:

$$L_h y_h = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{u_{i+1} - u_i}{h} - \dfrac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ u_0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ y_0 \end{array} \right\}, \tag{6.63}$$

где

$$\begin{aligned} &K_1 = f(x_i, u_i), && K_3 = f\Big(x_i + \tfrac{h}{2}, u_i + \tfrac{h}{2}K_2\Big), \\ &K_2 = f\Big(x_i + \tfrac{h}{2}, u_i + \tfrac{h}{2}K_1\Big), && K_4 = f(x_i + h, u_i + hK_3). \end{aligned} \tag{6.64}$$

Легко проверить, что эта схема имеет четвертый порядок аппроксимации.

В силу теоремы 6.1 для определения порядка сходимости схем Рунге–Кутта достаточно доказать их устойчивость. Это доказательство можно провести в полной аналогии с доказательством устойчивости схемы Эйлера. Действительно, все схемы типа (6.54) имеют вид

$$L_h y_h = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{u_{i+1} - u_i}{h} - G(x_i, u_i) \\ u_0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ y_0 \end{array} \right\}, \tag{6.65}$$

где функция $G(x, y)$ представляет собой линейную комбинацию функций $f(x, y)$ от промежуточных значений аргумента. Поэтому оценки для функции $G(x, y)$ и ее производных легко выразить через соответствующие оценки функции $f(x, y)$ и ее производных, используемые при доказательстве устойчивости метода Эйлера, откуда и следует сделанное утверждение.

В частности, имеет место следующая

Теорема 6.2. *Пусть функция $f(x, y)$ имеет в D непрерывные частные производные четвертого порядка. Тогда схема Рунге–Кутта* (6.63) *сходится с четвертым порядком точности, т. е.*

$$\|u_h - [y]_h\| < Ch^4. \tag{6.66}$$

Отметим в заключение, что схемы Рунге–Кутта допускают вычисления и с переменным шагом. Начиная с любого индекса i, можно уменьшить или увеличить последующий шаг сетки.

Замечание. В этом параграфе были рассмотрены численные методы решения начальной задачи (6.1) для одного скалярного уравнения первого порядка. Без существенных изменений разобранные методы переносятся на случай начальной задачи и для нормальной системы уравнений первого порядка [26].

§ 2. Краевые задачи

В этом параграфе будут рассмотрены простейшие численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Постановка этих задач и общие свойства их решений были изучены в гл. 4.

1. Метод стрельбы. Основная идея этого метода заключается в сведении решения исходной краевой задачи к многократному решению вспомогательных задач Коши для заданного дифференциального уравнения. Проиллюстрируем эту идею на примере краевой задачи на отрезке $[0, l]$ для уравнения второго порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\Big(x, y, \frac{dy}{dx}\Big), \tag{6.67}$$

$$\varphi_1\Big(y(0), \frac{dy}{dx}(0)\Big) = 0, \tag{6.68}$$

$$\varphi_2\Big(y(l), \frac{dy}{dx}(l)\Big) = 0, \tag{6.69}$$

где f, φ_1, φ_2 — заданные функции своих аргументов. Пусть функции f, φ_1, φ_2 являются достаточно гладкими и выполнены условия, при которых решение краевой задачи (6.67)–(6.69) существует и единственно, а также существуют единственные решения начальной задачи для уравнения (6.67) при произвольных начальных условиях, заданных при $x = 0$ или $x = l$. Выберем некоторые начальные условия $\bar{y}(0) = \bar{y}_0$, $\dfrac{d\bar{y}}{dx}(0) = \bar{y}_1$, удовлетворяющие левому граничному условию (6.68). Это можно, например, сделать, задавшись значением $\bar{y}_0$ и разрешая полученное уравнение

$$\varphi_1\Big(\bar{y}(0), \frac{d\bar{y}}{dx}(0)\Big) = 0 \tag{6.70}$$

относительно $\dfrac{d\bar{y}}{dx}(0) = y_1$. В силу сделанного предположения задача определения решения $\bar{y}(x)$ уравнения (6.67), удовлетворяющего выбранным начальным условиям, разрешима единственным образом. Если бы полученная при этом функция $\bar{y}(x)$ удовлетворяла и правому граничному условию

$$\varphi_2\Big(\bar{y}(l), \frac{d\bar{y}}{dx}(l)\Big) = 0, \tag{6.71}$$

то исходная краевая задача была бы решена. Однако в общем случае полученная функция $\bar{y}(x)$ не удовлетворяет правому граничному условию (6.71). По способу своего построения функция $\bar{y}(x)$ зависит от значения $\bar{y}_0$ как от параметра: $\bar{y}(x) = \bar{y}(x, \bar{y}_0)$, причем в силу общих свойств решения начальной задачи, изученных в гл. 2, эта зависимость непрерывная. Меняя значения $\bar{y}_0$ и повторяя описанный выше алгоритм, получим однопараметрическое семейство $\bar{y}(x, y_0)$ решений начальных задач для уравнения (6.67), удовлетворяющих левому граничному условию (6.68). Задача заключается в том, чтобы из этого семейства выделить функцию $y(x)$, удовлетворяющую и правому граничному условию (6.69). Этого можно достичь различными способами. Например, можно выбирать наудачу значения $\bar{y}_0$ до тех пор, пока при некоторых близких значениях $\bar{y}_{0,i-1}, \bar{y}_{0,i}$ не получатся разные по знаку левые части (6.69). Это будет означать, что искомое значение $\bar{y}_0$ «взято в вилку» и можно вести «пристрелку», уточняя искомое значение $\bar{y}_0$. В силу указанной выше непрерывной зависимости решений начальных задач от начальных данных искомое значение $\bar{y}_0$ лежит между $\bar{y}_{0,i-1}$ и $\bar{y}_{0,i}$. Этот способ решения краевой задачи (6.67)–(6.69) и носит название *метода стрельбы.*

Если решение задачи Коши $\bar{y}(x, \bar{y}_0)$ находится в квадратурах, то соотношение (6.71) представляет собой некоторое, вообще говоря, трансцендентное уравнение

$$\psi(y_0) = \varphi_2\Big(\bar{y}(l, \bar{y}_0), \frac{d\bar{y}}{dx}(l, \bar{y}_0)\Big) = 0 \tag{6.72}$$

относительно искомого значения $\bar{y}_0$. Тем самым задача сводится к задаче нахождения корня уравнения (6.72). Решив это уравнение (аналитически или численно), мы получим начальные условия $y(0)$, $\dfrac{dy}{dx}(0)$, которым удовлетворяет решение исходной краевой задачи.

В общем случае функции $\bar{y}(x_0, \bar{y}_0)$ не имеют явного аналитического выражения и могут быть найдены лишь численно для каждого конкретного значения параметра $\bar{y}_0$. Тогда можно воспользоваться численными методами решения уравнения (6.72) — различными модификациями метода Ньютона, метода парабол и т. д. Например, можно по описанному выше алгоритму для значений параметра $\bar{y}_0$, равных $\bar{y}_{0,i-1}$ и $\bar{y}_{0,i}$, построить функции $\bar{y}(x, \bar{y}_{0,i-1})$ и $\bar{y}(x, \bar{y}_{0,i})$. Тогда новое значение параметра $\bar{y}_{0,i+1}$, согласно методу секущих, находится из соотношения

$$\bar{y}_{0,i+1} = \bar{y}_{0,i} - \frac{(\bar{y}_{0,i} - \bar{y}_{0,i-1})\psi(\bar{y}_{0,i})}{\psi(\bar{y}_{0,i}) - \psi(\bar{y}_{0,i-1})}. \tag{6.73}$$

Отметим, что если начальное значение $\bar{y}_0$ выбрано вблизи корня уравнения (6.72), то итерационный процесс (6.73) быстро сходится. Проведенные рассмотрения справедливы в общем случае нелинейной краевой задачи. В случае линейной краевой задачи

$$L[y] = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)y(x) = f(x), \tag{6.74}$$

$$\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0, \tag{6.75}$$

$$\alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0, \tag{6.76}$$

можно предложить модификацию метода стрельбы, позволяющую получить решение исходной краевой задачи, сведя ее к решению сравнительно небольшого числа начальных задач.

Построим функцию $y_1(x)$, представляющую собой решение задачи для неоднородного уравнения (6.74) с начальными условиями

$$y_1(0) = \alpha_1, \quad y_1'(0) = -\beta_1. \tag{6.77}$$

Очевидно, в силу (6.77) функция $y_1(x)$ удовлетворяет левому граничному условию (6.75). Определим функцию $y_0(x)$ как решение задачи для однородного уравнения (6.74) с теми же начальными условиями

$$y_0(0) = \alpha_1, \quad y_0'(0) = -\beta_1. \tag{6.78}$$

В силу линейности задачи и однородных условий функция $Cy_0(x)$ также представляет собой решение однородного уравнения (6.74), удовлетворяющее левому граничному условию (6.75). Поэтому решение исходной краевой задачи можно искать в виде

$$y(x) = y_1(x) + Cy_0(x), \tag{6.79}$$

определяя постоянную C из требования удовлетворения функцией (6.79) правому граничному условию (6.76):

$$\alpha_2 y_1'(l) + \beta_2 y_1(l) + C[\alpha_2 y_0'(l) + \beta_2 y_0(l)] = 0. \tag{6.80}$$

Заметим, что в силу сделанного предположения о единственности решения исходной краевой задачи выражение в квадратных скобках в (6.80) заведомо отлично от нуля; тем самым постоянная C из этого соотношения определяется однозначно. Таким образом, в рассматриваемом случае решение краевой задачи сводится к решению всего двух начальных задач, что может быть осуществлено рассмотренными в § 1 настоящей главы численными методами.

Замечания. 1. Решение краевых задач для уравнений и систем более высокого порядка, чем второго, также может быть проведено методом стрельбы. Основные идеи метода при этом существенно не меняются, однако вместо одного уравнения (6.72) мы в общем случае получим систему p трансцендентных уравнений типа (6.72) относительно параметров $y_1, y_2, \ldots, y_p$, где p — число левых граничных условий. Это приводит к значительной технической трудности при практической реализации решения систем высокого порядка методом стрельбы. Исключение составляют лишь линейные системы, для которых задача сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений.

2. В методе стрельбы решение исходной краевой задачи сводится к решению ряда вспомогательных начальных задач. Из полученных выше (§ 1) оценок зависимости ошибки численного решения начальной задачи от ошибок задания начальных данных и вычисления правых частей уравнений следует, что эта ошибка может экспоненциально нарастать с увеличением длины отрезка $[0, t]$, на котором решается краевая задача. Это приводит к необходимости или значительной модификации метода стрельбы (так называемый метод дифференциальной ортогональной прогонки) [9], или применения для решения краевых задач прямых конечно-разностных методов, изложению которых и будет посвящен следующий пункт.

2. Конечно-разностные методы. Как мы уже отмечали, суть этих методов сводится к замене исходной задачи для дифференциального уравнения системой алгебраических уравнений для значений сеточной функции, аппроксимирующей на сетке решение исходной задачи. Рассмотрим основные идеи этого метода на примере простейшей линейной краевой задачи для уравнения второго порядка

$$y'' - q(x)y = f(x), \tag{6.81}$$

$$y(0) = y(l) = 0. \tag{6.82}$$

Легко видеть, что при $q(x) > 0$ краевая задача (6.81), (6.82) имеет единственное решение. Это утверждение является следствием общего свойства задачи на собственные значения, рассмотренной в гл. 4. Как было показано, при $q(x) > 0$ все собственные значения λ_n соответствующей задачи на собственные значения строго положительны: $\lambda_n > 0$. Поскольку $\lambda = 0$ не является собственным значением этой задачи, краевая задача (6.81)–(6.82) разрешима единственным образом.

Единственность решения задачи (6.81), (6.82) можно доказать и непосредственно, опираясь на так называемый *принцип максимума*. Предположим, что существует нетривиальное решение однородной краевой задачи (6.81), (6.82) — функция $y_0(x)$. Эта функция непрерывна на замкнутом отрезке $[0,l]$, следовательно, по известному свойству непрерывных функций принимает в некоторой точке x_0 этого отрезка свое максимальное значение M:

$$y_0(x) \leqslant M = y_0(x_0), \quad x \in [0,l], \tag{6.83}$$

причем $M \geqslant 0$, поскольку $y_0(0) = y_0(l) = 0$. Точка x_0 может быть либо граничной, либо внутренней точкой $[0,l]$. Пусть x_0 — граничная точка. Но тогда $M = 0$, поскольку $y_0(0) = y_0(l) = 0$. Допустим теперь, что x_0 — внутренняя точка; тогда в этой точке имеется максимум и $y''(x_0) \leqslant 0$. Но из самого уравнения (см. (6.81) при $f(x) = 0$) следует

$$0 \geqslant y_0''(x_0) = q(x_0)y_0(x_0) = q(x_0)M \geqslant 0, \tag{6.84}$$

а это может выполняться лишь при $M = 0$. Итак, $M = 0$. Аналогичным образом легко показать, что и минимальное m значение функции $y_0(x)$ на замкнутом отрезке $[0,l]$ равно нулю: $m = 0$. Отсюда следует, что $y_0(x) \equiv 0$, $x \in [0,l]$, что и доказывает утверждение единственности решения краевой задачи (6.81), (6.82).

Перейдем к построению разностной схемы, аппроксимирующей задачу (6.81), (6.82). Введем на отрезке $[0,l]$ сетку ω_h и рассмотрим сеточную функцию $y_{(h)}$, определенную в узлах сетки. Вторую производную $y''(x)$ аппроксимируем разностным отношением

$$(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})/h^2 \tag{6.85}$$

и сопоставим исходной краевой задаче конечно-разностную схему

$$L_h y_{(h)} = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{y_{(h)i+1} - 2y_{(h)i} + y_{(h)i-1}}{h^2} - q_{(h)i}y_{(h)i} \\ y_{(h)0} \\ y_{(h)n} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} f_{(h)i} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}, \tag{6.86}$$

где $q_{(h)i} = q(x_i)$, $f_{(h)i} = f(x_i)$.

Схема (6.86), очевидно, представляет собой систему $n+1$ линейного алгебраического уравнения относительно значений сеточной функции в $n+1$ узлах сетки. При исследовании этой схемы мы должны выяснить вопросы, связанные с ее разрешимостью, устойчивостью и сходимостью семейства сеточных функций при $h \to 0$ к решению исходной задачи, и указать алгоритмы построения сеточных функций.

Начнем с выяснения вопросов разрешимости схемы (6.86). Поскольку эта схема представляет собой систему линейных уравнений, то для существования и единственности решения неоднородной системы достаточно установить отсутствие нетривиальных решений у соответствующей однородной системы. Предположим, что однородная система имеет нетривиальное решение $y_{(h)0} = 0, \ldots, y_{(h)i} \neq 0, \ldots, y_{(h)n} = 0$. Наибольшее из этих $n+1$ чисел обозначим через M:

$$y_{(h)i} \leqslant M = y_{(h)k}. \tag{6.87}$$

Так как $y_{(h)0} = y_{(h)n} = 0$, то $M \geqslant 0$. Будем теперь рассуждать как и при доказательстве отсутствия нетривиального решения у однородного уравнения (6.81). Пусть M достигается в одном из граничных узлов. Тогда $M = 0$. Если же M достигается во внутреннем узле $i = k$, то в силу однородного уравнения (6.86) имеет место равенство

$$(2 + h^2 q_{(h)k}) y_{(h)k} = (2 + h^2 q_{(h)k}) M = y_{(h)k+1} + y_{(h)k-1} \leqslant 2M. \tag{6.88}$$

Если $M > 0$, то отсюда получим противоречие, поскольку, в силу условия $q(x) > 0$, имеем $(2 + h^2 q_{(h)k}) M > 2M$. Поэтому и в этом случае $M = 0$. Итак, $M = 0$. Аналогичным образом легко показать, что минимальное m значение из $n+1$ чисел, $y_{(h)0}, y_{(h)1}, \ldots, y_{(h)n}$ также равно нулю: $m = 0$. Следовательно, все значения $y_{(h)0}, y_{(h)1}, \ldots, y_{(h)n}$ равны нулю, что означает отсутствие нетривиальных решений у однородной системы линейных алгебраических уравнений (6.86). Итак, *разностная схема* (6.86) *однозначно разрешима для любой правой части* $f_{(h)}$ *при любом* n.

Перейдем теперь к изучению аппроксимирующих свойств схемы (6.86). Пусть функции $q(x)$ и $f(x)$ имеют вторые непрерывные производные на отрезке $[0, l]$. Тогда из (6.81) следует, что решение краевой задачи (6.81), (6.82) обладает на отрезке $[0, l]$ непрерывными и ограниченными производными до четвертого порядка. Разлагая точное решение краевой задачи по формуле Тейлора и подставляя это разложение в левую часть уравнения (6.86):

$$\frac{1}{h^2}\Big\{y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}y^{(IV)}(x_i + \theta_1 h) - \\ - 2y(x_i) + y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) - \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}y^{(IV)}(x_i - \theta_2 h)\Big\} - \\ - q(x_i)y(x_i), \tag{6.89}$$

где $0 \leqslant \theta_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta_2 \leqslant 1$, получим

$$y''(x_i) - q(x_i)y(x_i) + \frac{h^2}{24}\left[y^{(IV)}(x_i + \theta_1 h) + y^{(IV)}(x_i - \theta_2 h)\right] = f(x_i), \tag{6.90}$$

откуда следует, что порядок аппроксимации схемы (6.86) равен 2.

Рассмотрим вопрос об устойчивости разностной схемы (6.86) по отношению к возмущениям граничных условий и правой части уравнения. Возмущенная задача имеет вид

$$L_h\bar{y}_{(h)}=\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\bar{y}_{(h)i+1}-2\bar{y}_{(h)i}+\bar{y}_{(h)i-1}}{h^2}-q_{(h)i}\bar{y}_{(h)i}\\ \bar{y}_{(h)0}\\ \bar{y}_{(h)n}\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c}f_{(h)i}+\delta f_{(h)i}\\ \varepsilon_0\\ \varepsilon_n\end{array}\right\}. \tag{6.91}$$

Обозначив погрешность решения

$$\delta y_{(h)i}=\bar{y}_{(h)i}-y_{(h)i} \tag{6.92}$$

и вычитая (6.91) из (6.86), получим в силу линейности

$$\begin{gathered}(2+h^2q_{(h)i})\delta y_{(h)i}=\delta y_{(h)i+1}+\delta y_{(h)i-1}-h^2\delta f_{(h)i},\\ \delta y_{(h)0}=\varepsilon_0,\quad \delta y_{(h)n}=\varepsilon_n.\end{gathered} \tag{6.93}$$

Выберем то значение $i=k$ $(i=1,\ldots,n-1)$, при котором абсолютная величина погрешности наибольшая:

$$|\delta\ y_{(h)k}|\geqslant|\delta y_{(h)i}|,\qquad i=1,\ldots,n-1. \tag{6.94}$$

Из уравнения (6.93) имеем

$$(2+h^2q_{(h)k})|\delta y_{(h)k}|\leqslant|\delta y_{(h)k+1}|+|\delta y_{(h)k-1}|+h^2|\delta f_{(h)k}|. \tag{6.95}$$

Неравенство (6.95) только усилится, если заменить $|\delta y_{(h)k+1}|$ и $|\delta y_{(h)k-1}|$ на максимальное значение $|\delta y_{(h)k}|$, а $|\delta f_{(h)k}|$ — на максимальное значение $|\delta f_{(h)}|$. Тогда (6.95) дает

$$h^2q_{(h)k}|\delta y_{(h)k}|\leqslant h^2\|\delta f_{(h)}\|. \tag{6.96}$$

Отсюда получим

$$|\delta y_{(h)k}|\leqslant\|\delta f_{(h)}\|/\min_{[0,l]}q(x),\quad k=1,\ldots,n-1,$$

а так как $|\delta y_{(h)k}|\leqslant\max\{|\varepsilon_0|,|\varepsilon_k|\}$ $(k=0,n)$, то окончательно

$$\|\delta y_{(h)}\|\leqslant\max\left\{\frac{\|\delta f_{(h)}\|}{\min_{[0,l]}q(x)},\ |\varepsilon_0|,\ |\varepsilon_n|\right\}\leqslant C\|\delta\varphi_{(h)}\|_1, \tag{6.97}$$

что и доказывает устойчивость схемы (6.86) по граничным условиям и правой части уравнения.

Установленные свойства аппроксимации и устойчивости схемы (6.86) позволяют на основании теоремы 6.1 утверждать справедливость следующей теоремы.

Теорема 6.3. *Если функции $q(x) > 0$ и $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы на отрезке $[0, l]$, то семейство $y_{(h)}$ решений разностной схемы* (6.86) *сходится при $h \to 0$ к точному решению задачи* (6.81), (6.82), *причем порядок сходимости равен* 2.

Остановимся теперь на вопросах реализации схемы (6.86). В отличие от рассмотренных выше разностных схем решения начальной задачи (схемы Эйлера, Рунге–Кутта), данная схема не дает явного алгоритма последовательного вычисления значений сеточной функции в узлах сетки, а представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, в которую входят неизвестные значения сеточной функции во всех узлах сетки. Поэтому для численного решения задачи (6.86) можно воспользоваться общими методами решения линейных алгебраических систем. Однако в случае достаточно большого порядка n эти методы оказываются весьма трудоемкими. Естественно воспользоваться специальными свойствами матрицы полученной алгебраической системы. В данном случае матрица системы трехдиагональная — лишь на главной диагонали и двух побочных диагоналях элементы матрицы отличны от нуля. Это позволяет предложить для решения системы (6.86) весьма эффективный специальный метод, к изложению которого мы и перейдем.

3. Метод алгебраической прогонки решения линейных алгебраических систем с трехдиагональной матрицей. Рассмотрим этот метод для следующей системы, являющейся некоторым обобщением схемы (6.86):

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{6.98}$$

$$y_0 = \alpha y_1 + \beta, \quad y_n = \gamma y_{n-1} + \delta. \tag{6.99}$$

Пусть коэффициенты, входящие в уравнения (6.98) и граничные соотношения (6.99), удовлетворяют условиям

$$A_i, B_i, C_i > 0; \quad C_i \geqslant A_i + B_i, \quad 0 \leqslant \alpha < 1; \quad 0 \leqslant \gamma < 1. \tag{6.100}$$

Очевидно, в рассмотренном выше случае схемы (6.86) условия (6.100) выполнены. Так же, как и в случае схемы (6.86), нетрудно показать, что при выполнении условий (6.100) задача разрешима, и притом единственным образом.

Будем искать такие коэффициенты α_i, β_i, чтобы для всех значений индекса $i = 1, 2, \ldots, n$ имело место соотношение

$$y_{i-1} = \alpha_i y_i + \beta_i. \tag{6.101}$$

Подставим искомый вид решения (6.101) в уравнение (6.98); получим

$$(A_i\alpha_i - C_i)y_i + B_i y_{i+1} + (A_i\beta_i + F_i) = 0. \qquad (6.102)$$

Выражая y_i через y_{i+1} по формуле (6.101), перепишем (6.102) в виде

$$\big[(A_i\alpha_i - C_i)\alpha_{i+1} + B_i\big]y_{i+1} + \big[(A_i\alpha_i - C_i)\beta_{i+1} + A_i\beta_i + F_i\big] = 0. \qquad (6.103)$$

Для того чтобы (6.103) удовлетворялось тождественно при $i = 1, 2, \ldots, n-1$, достаточно потребовать, чтобы каждая из квадратных скобок обращалась в нуль при $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Это требование дает рекуррентные соотношения для последовательного определения по заданным значениям $\alpha = \alpha_1$ и $\beta = \beta_1$ «прогоночных» коэффициентов α_{i+1} и β_{i+1} («прямая прогонка»):

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i\alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i\beta_i + F_i}{C_i - A_i\alpha_i}. \qquad (6.104)$$

Легко показать, что при выполнении условий (6.100) знаменатели в формулах (6.104) отличны от нуля и, более того, $0 \leqslant \alpha_i < 1$. Действительно, перепишем второе условие (6.100) в виде

$$C_i = A_i + B_i + D_i, \quad D_i \geqslant 0. \qquad (6.105)$$

Тогда первую формулу (6.104) можно записать в виде

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{B_i + A_i(1-\alpha_i) + D_i}. \qquad (6.106)$$

Так как $0 \leqslant \alpha_1 < 1$, $A_i, B_i > 0$ и $D_i \geqslant 0$, отсюда следует, что и для всех α_i, вычисляемых по формуле (6.106), выполняется условие $0 \leqslant \alpha_i < 1$. Итак, все знаменатели в формуле (6.104) строго больше нуля, что позволяет найти все прогоночные коэффициенты. Вычислив α_n и β_n из (6.101), получим

$$y_{n-1} = \alpha_n y_n + \beta_n. \qquad (6.107)$$

С другой стороны, в силу граничного условия (6.99)

$$y_n = \gamma y_{n-1} + \delta = \gamma(\alpha_n y_n + \beta_n) + \delta, \qquad (6.108)$$

откуда

$$y_n = (\gamma\beta_n + \delta)/(1 - \gamma\alpha_n). \qquad (6.109)$$

Выше мы показали, что $0 \leqslant \alpha_n < 1$. Поэтому в силу условия (6.100) $(0 \leqslant \gamma < 1)$ знаменатель и этого выражения отличен от нуля. Тем самым y_n определено. Теперь по формуле (6.101) можем последовательно вычислять все неизвестные y_{i-1} $(i = n, n-1, \ldots, 1)$ (*обратная прогонка*).

Замечания.

1. В силу установленного соотношения $0 \leqslant \alpha_i < 1$ ни при прямой, ни при обратной прогонке не происходит накопления погрешностей вычисления.

2. Мы рассмотрели схему метода прогонки, в которой сначала определяются прогоночные коэффициенты при переносе левого граничного условия, а затем восстанавливается решение по формуле (6.101). Очевидно, аналогичным образом может быть рассмотрена схема, в которой прогоночные коэффициенты определяются прогонкой справа налево правого граничного условия, а решение восстанавливается прогонкой слева направо.

Г Л А В А 7

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО МАЛОМУ ПАРАМЕТРУ

Необходимость развития приближенных методов решения дифференциальных уравнений отмечалась выше. Гл. 6 была посвящена так называемым численным методам решения дифференциальных уравнений, которые дают возможность для данного уравнения с конкретными дополнительными условиями получить с произвольной степенью точности таблицу значений решения в узлах сетки. В настоящей главе будет идти речь о другом классе приближенных методов, о так называемых асимптотических методах, которые ставят своей целью получение формулы, описывающей качественное поведение решения на некотором интервале изменения независимого переменного. Точность такой формулы имеет естественное ограничение (подробнее об этом см. ниже). Заметим сразу же, что численные и асимптотические методы не исключают, а взаимно дополняют друг друга.

§ 1. Регулярные возмущения

1. Понятие асимптотического представления. В § 5 гл. 2 подробно исследовался вопрос о зависимости решения начальной задачи от входящих в уравнение параметров. В настоящем параграфе мы положим $t_0 = 0$, что всегда можно добиться заменой независимого переменного, и ограничимся скалярным случаем (y, μ — скаляры), что не принципиально, а делается лишь в целях краткости изложения. Итак, рассмотрим начальную задачу

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t,\mu), \quad y(0,\mu) = y^0. \tag{7.1}$$

При этом будем считать, что μ изменяется в некоторой окрестности значения $\mu = 0$, что тоже можно добиться соответствующим выбором начала отсчета по оси μ.

В гл. 2 (теорема 2.10) было доказано, что при соответствующих условиях на правую часть (7.1) решение $y(t,\mu)$ задачи (7.1) существует и является непрерывной функцией t и μ на множестве $t \in [0,T]$, $|\mu| < c$.

Доказанная теорема заключает в себе следующую возможность построения приближенного решения задачи (7.1). Рассмотрим задачу, которая получается из (7.1), если в ней формально положить

$\mu = 0$:
$$\frac{dy}{dt} = f(y, t, 0), \quad y(0) = y^0. \tag{7.2}$$

Задача (7.2), вообще говоря, проще исходной задачи (7.1), и ее решение, которое обозначим $\bar{y}(t)$, исследовать проще, а возможно даже удастся эффективно построить. Из теоремы 2.10 следует, что на некотором сегменте $[0, T]$
$$y(t, \mu) = \bar{y}(t) + \varepsilon(t, \mu), \tag{7.3}$$
где $\varepsilon(t, \mu) \to 0$ при $\mu \to 0$. Таким образом, $\bar{y}(t)$ служит для $y(t, \mu)$ приближенным выражением, а $\varepsilon(t, \mu)$ есть погрешность этого приближения.

Формула (7.3) является простейшим вариантом так называемой *асимптотической формулы* (или *асимптотического представления*) решения $y(t, \mu)$ по малому параметру μ. Асимптотическими формулами по малому параметру мы будем называть такие формулы, в которых некоторые члены, называемые *остаточными членами*, выписываются не точно, а указываются лишь их свойства при $\mu \to 0$, например, порядок стремления к нулю при $\mu \to 0$.

В формуле (7.3) слагаемое $\varepsilon(t, \mu)$ является остаточным членом. Теорема 2.11 дает возможность указать порядок стремления $\varepsilon(t, \mu)$ к нулю. В самом деле, существование производной по μ дает возможность написать
$$y(t, \mu) = \bar{y}(t) + \frac{\partial y}{\partial \mu}(t, \theta\mu)\mu, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1, \tag{7.4}$$
и установить тем самым, что $\varepsilon(t, \mu) = \mathcal{O}(\mu)$. Здесь и в дальнейшем подобного рода равенство означает, что $|\varepsilon(t, \mu)| \leqslant C\mu$, где C — некоторая постоянная, не зависящая от μ при достаточно малых μ.

Чем меньше μ, тем лучше $\bar{y}(t)$ приближает $y(t, \mu)$. Однако в реальных задачах μ является малой, но не бесконечно малой величиной. Поэтому асимптотическая формула произвольную степень точности обеспечить не может и это является ее принципиальным недостатком. Тем не менее асимптотические формулы очень удобны в тех случаях, когда требуется получить качественную картину решения.

Замечание. Сказанное относится к задачам, в которых малый параметр μ является естественным физическим малым параметром. Существуют, однако, задачи иного рода, например, задачи, возникающие при обосновании вычислительных алгоритмов, когда искусственно вводится некий малый параметр, скажем величина шага, значением которого можно распоряжаться произвольно. В такого рода задачах обеспечивается произвольная степень точности.

Результаты гл. 2 позволяют получить для $y(t,\mu)$ асимптотическую формулу с остаточным членом более высокого порядка малости, чем $\mathcal{O}(\mu)$*), если $f(y,t,\mu)$ удовлетворяет условиям, обеспечивающим существование $n+1$ непрерывных производных по μ. Сформулируем этот вывод из § 5 гл. 2 в виде отдельной теоремы.

Теорема 7.1. *Пусть в некоторой области D переменных y,t,μ функция $f(y,t,\mu)$ обладает непрерывными и равномерно ограниченными частными производными по y и μ до порядка $n+1$ включительно. Тогда существует сегмент $[0,T]$, на котором для решения $y(t,\mu)$ задачи (7.1) справедливо асимптотическое представление*

$$y(t,\mu)=\bar{y}(t)+\mu\frac{\partial y}{\partial\mu}(t,0)+\dots+\frac{\mu^n}{n!}\frac{\partial^n y}{\partial\mu^n}(t,0)+\varepsilon_{n+1}(t,\mu), \tag{7.5}$$

где $\varepsilon_{n+1}(t,\mu)\rightrightarrows 0$ при $\mu\to 0$, $0\leqslant t\leqslant T$, причем $\varepsilon_{n+1}(t,\mu)=\mathcal{O}(\mu^{n+1})$.

Замечания.

1. Величины $\dfrac{\partial^n y}{\partial\mu^n}(t,0)$ определяются из уравнений в вариациях, выписанных в § 5 гл. 2. Представление (7.5) можно получить и иначе. Подставим в (7.1) выражение для y в виде формального ряда

$$y=y_0(t)+\mu y_1(t)+\dots \tag{7.6}$$

Раскладывая после подстановки величину $f(y_0+\mu y_1+\dots,t,\mu)$ также формально в степенной ряд, получим

$$\begin{gathered}\frac{dy_0}{dt}+\mu\frac{dy_1}{dt}+\dots=\\ =f(y_0,t,0)+\frac{\partial f}{\partial y}(y_0,t,0)(\mu y_1+\dots)+\frac{\partial f}{\partial\mu}(y_0,t,0)\mu+\dots\\ \dots+\frac{1}{n!}\Big((\mu y_1+\dots)\frac{\partial}{\partial y}+\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\Big)^n f(y_0,t,0)+\dots;\\ y_0(0)+\mu y_1(0)+\dots=y^0.\end{gathered}$$

Приравнивая члены с одинаковыми степенями μ, будем иметь

$$\frac{dy_0}{dt}=f(y_0,t,0),\quad y_0(0)=y^0, \tag{7.7$'$}$$

$$\frac{dy_1}{dt}=\frac{\partial f}{\partial y}(y_0,t,0)y_1+\frac{\partial f}{\partial\mu}(y_0,t,0),\quad y_1(0)=0, \tag{7.7$''$}$$

....

*)См. сноску на с. 178.

Решая последовательно эти задачи, определим члены ряда (7.6). Задача (7.7′) для $y_0(0)$ совпадает с задачей (7.2), и, стало быть, в силу единственности $y_0(t) = \bar{y}(t)$. Задача (7.7″) — с задачей для $\dfrac{\partial y}{\partial \mu}(t,0)$ (см. (2.141)), и, стало быть, $y_1(t) = \dfrac{\partial y}{\partial \mu}(t,0)$ и т. д.

2. Если $f(y,t,\mu)$ обладает в D непрерывными и равномерно ограниченными производными любого порядка, то в (7.5) n является величиной произвольной. Для $y(t,\mu)$ тем самым определен ряд Маклорена с общим членом $\mu^n y_n(t) = \mu^n \dfrac{\partial^n y}{\partial \mu^n}(t,0)$ такой, что разность $\varepsilon_{n+1}(t,\mu)$ между частичной суммой этого ряда и решением $y(t,\mu)$ есть $\mathcal{O}(\mu^{n+1})$. Такой ряд называется *асимптотическим рядом* или *асимптотическим разложением* по малому параметру μ для $y(t,\mu)$. Подчеркнем, что $\varepsilon_{n+1}(t,\mu) = \mathcal{O}(\mu^{n+1})$ при фиксированном n и $\mu \to 0$. Если же μ фиксировано, а $n \to \infty$, то $\varepsilon_{n+1}(t,\mu)$ может предела не иметь, т. е. построенный таким образом ряд сходящимся, вообще говоря, не является.

3. Вместо терминов «асимптотическая формула», «асимптотическое представление», «асимптотическое разложение» употребляется краткое название «асимптотика».

4. Теория, развитая в § 5 гл. 2, и следующая из нее теорема 7.1 дают математическое обоснование «обычной» для физики и техники операции отбрасывания малых членов в уравнении. Эти малые члены часто называются *возмущениями*. В связи с этим уравнение (7.2) называется *невозмущенным уравнением*, а уравнение (7.1) — *возмущенным уравнением*. Теория, имеющая целью обоснование асимптотики по малому параметру μ, часто называется *теорией возмущений*.

Теорема 7.1 справедлива при условиях достаточной гладкости (или, как говорят, регулярности) правой части (7.1) по y и μ. Возмущения, подчиняющиеся требованиям теоремы 7.1, называются *регулярными возмущениями*. Этим разъясняется название настоящего параграфа.

Пример 7.1. Получим справедливую на $[0,T]$ асимптотическую формулу с остаточным членом $\mathcal{O}(\mu^2)$ для решения $y(t,\mu)$ задачи

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y + b(t) + \mu c(t)y^2, \quad y(0) = 0.$$

Это уравнение Риккати, решение которого эффективно получить не удается. Функции же $y_0(t)$ и $y_1(t)$ строятся квадратурами, а именно,

$$\frac{dy_0}{dt} = a(t)y_0 + b(t), \quad y_0(0) = 0,$$

следовательно,

$$y_0(t) = \int\limits_0^t b(\tau) e^{\int\limits_\tau^t a(t)\,dt} d\tau; \qquad \frac{dy_1}{dt} = a(t) y_1 + c(t) y_0^2, \quad y_1(0) = 0,$$

и, следовательно,

$$y_1(t) = \int\limits_0^t c(\tau) y_0^2(\tau) e^{\int\limits_\tau^t a(t)\,dt} d\tau; \qquad y(t,\mu) = y_0(t) + \mu y_1(t) + \mathcal{O}(\mu^2).$$

2. Существование решения возмущенной задачи. Результаты, полученные в § 5 гл. 2, обладают той особенностью, что справедливость асимптотического представления гарантируется на некотором сегменте $[0, T]$, определяемом свойствами правой части (7.1), одновременно с существованием и единственностью как невозмущенного, так и возмущенного уравнений.

Можно ставить вопрос иначе. Допустим, что решение невозмущенной задачи (7.2) существует, единственно и принадлежит некоторой области G пространства переменных (y, t) при $0 \leqslant t \leqslant T$. Величину T в данном случае можно, например, установить непосредственно из явного вида $\bar{y}(t)$. Будет ли при достаточно малых μ решение задачи (7.1) также существовать на всем $[0, T]$ и подчиняться формуле (7.3)? Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 7.2. *Пусть в области* $G = \{0 \leqslant t \leqslant T,\ |y| \leqslant b,\ |\mu| \leqslant \bar{\mu}\}$ *функция* $f(y, t, \mu)$ *непрерывна по совокупности аргументов и удовлетворяет условию Липшица*

$$|f(y_1, t, \mu) - f(y_2, t, \mu)| \leqslant N |y_1 - y_2|,$$

где N *— одна и та же постоянная для всех* μ *из отрезка* $|\mu| \leqslant \bar{\mu}$. *Пусть решение* $\bar{y}(t)$ *задачи* (7.2) *существует и единственно на* $[0, T]$ *и принадлежит* $D = \{0 \leqslant t \leqslant T,\ |y| < b\}$. *Тогда при каждом достаточно малом* μ *решение* $y(t, \mu)$ *задачи* (7.1) *также существует и единственно на* $[0, T]$ *и принадлежит* D, *причем имеет место равномерный относительно* t *предельный переход*

$$\lim_{\mu \to 0} y(t, \mu) = \bar{y}(t). \tag{7.8}$$

Доказательство. Перейдем в (7.1) к новой неизвестной функции $\Delta = y - \bar{y}(t)$, которая является решением начальной задачи (ср. (2.137)); получим

$$\frac{d\Delta}{dt} = \left[f(\bar{y} + \Delta, t, \mu) - f(\bar{y}, t, \mu)\right] + \left[f(\bar{y}, t, \mu) - f(\bar{y}, t, 0)\right], \quad \Delta(0) = 0. \tag{7.9}$$

Рассмотрим следующую область переменных Δ, t:

$$\widetilde{D} = \{0 \leqslant t \leqslant T,\ |\Delta| < C\}, \quad \text{где} \ \ C = b - \beta,\ \beta = \sup_{[0,T]} |\bar{y}(t)|.$$

При $|\Delta| < C$ имеем $|y| < |\bar{y}| + |\Delta| < \beta + C = b$, т. е. при $|\Delta| < C$ аргументы $f(y, t, \mu)$ остаются в области G. Тогда в силу условия Липшица

$$\big|f(\bar{y} + \Delta, t, \mu) - f(\bar{y}, t, \mu)\big| \leqslant N|\Delta|,$$

а в силу непрерывности $f(y,t,\mu)$ заключаем, что $f(\bar{y},t,\mu) - f(\bar{y},t,0) \to \to 0$ при $\mu \to 0$ равномерно относительно t, т. е. существует некоторая функция $\omega(\mu)$, зависящая только от μ и стремящаяся к нулю при $\mu \to 0$, такая, что

$$\big|f(\bar{y}, t, \mu) - f(\bar{y}, t, 0)\big| < \omega(\mu).$$

Воспользуемся теперь теми же соображениями, что и при доказательстве теоремы 3.2. Теорема существования и единственности обеспечивает существование и единственность $\Delta(t, \mu)$ и выполнение неравенства $|\Delta| < C$ на некотором отрезке $[0, H]$. Принимая $H, \Delta(H, \mu)$ за новую начальную точку, можно продолжить решение на больший отрезок $[0, H_1]$ $(H_1 > H)$ и т. д. Пусть $[0, \bar{H})$ $(\bar{H} \leqslant T)$ — максимальный полуинтервал, на котором существует единственное решение $\Delta(t, \mu)$ задачи (7.9), принадлежащее $\widetilde{D}$, а $H_n \to \bar{H}$ — произвольная последовательность. Докажем, что существует $\lim_{n\to\infty} \Delta(H_n, \mu)$.

Так как для любого n на $[0, H_n]$ имеем $|\Delta(t, \mu)| < C$, то

$$\left|\frac{d\Delta}{dt}\right| \leqslant N|\Delta| + \omega(\mu),$$

а тогда, согласно лемме 2.1,

$$|\Delta| \leqslant \frac{\omega(\mu)}{N}(e^{N\bar{H}} - 1) = \omega_1(\mu), \tag{7.10}$$

где $\omega_1(\mu)$ обладает теми же свойствами, что и $\omega(\mu)$. Следовательно,

$$\left|\frac{d\Delta}{dt}\right| \leqslant N\omega_1(\mu) + \omega(\mu).$$

На основании этого неравенства доказывается существование предела $\lim_{n\to\infty} \Delta(H_n, \mu)$ точно так же, как при доказательстве теоремы 3.2. Поскольку $|\Delta(H_n, \mu)| \leqslant \omega_1(\mu) < C$, то и $\lim_{n\to\infty} \Delta(H_n, \mu) \leqslant \leqslant \omega_1(\mu) < C$. Дальнейшие рассуждения полностью совпадают с теми, которые были проведены при доказательстве теоремы 3.2, и приводят к выводу, что $\bar{H} = T$ и $\Delta(t, \mu)$ существует и единственно на отрезке $[0,T]$. Из неравенства (7.10) следует равномерное стремление $\Delta(t,\mu)$ к нулю при $\mu \to 0$, т.е. следует (7.8). Теорема доказана.

Замечания.

1. Теорема доказана для скалярного случая, но аналогичное утверждение справедливо и для случая, когда y — вектор.

2. Теорема 7.2 остается справедливой, если имеет место возмущение не только в уравнении, но и в начальных условиях, т.е. если (7.1) имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t,\mu), \quad y(\omega_1(\mu),\mu) = y^0 + \omega_2(\mu).$$

§ 2. Сингулярные возмущения

В приложениях нередко встречаются случаи, когда малый параметр μ входит в уравнение таким образом, что теория предыдущего параграфа неприменима. Рассмотрим в качестве простейшего примера движение маятника (см. гл. 1, § 2):

$$\mu y'' + \alpha y' + ky = f(t), \tag{7.11}$$

где $I = \mu$ является малым параметром. В случае, разобранном в предыдущем параграфе, в целях получения приближенного выражения для решения можно было в уравнении формально положить $\mu = 0$ и взять решение полученного таким образом упрощенного уравнения. Можно ли поступить так же в случае (7.11)?

Движение маятника в (7.11) определяется заданием начального положения и скорости $y(0) = y_0^0$, $y'(0) = y_1^0$. Полагая в (7.11) $\mu = 0$, мы получим уравнение *более низкого* (первого) порядка, решение которого определяется только заданием $y(0)$. Тем самым заранее ясно, что, поступая так, мы не можем учесть все факторы, определяющие решение (7.11), и по крайней мере в окрестности начальной точки правильной модели не получим.

Таким образом, выводы предыдущего параграфа в данном случае несправедливы и, стало быть, условия теорем предыдущего параграфа нарушены. Чтобы понять, какие условия нарушены, запишем (7.11) в форме (7.1) (уравнение уже будет векторным, но, как отмечалось выше, это не принципиально):

$$z' = \frac{-\alpha z - ky + f(t)}{\mu} = f_1(z,y,t,\mu),$$
$$y' = z = f_2(z,y,t,\mu).$$

Отсюда видно, что f_1 не является непрерывной функцией μ при $\mu = 0$, т. е. не выполнено основное требование теории предыдущего параграфа — требование непрерывности правых частей. Другими словами, можно сказать, что в данном случае правая часть зависит от μ *нерегулярным*, или *сингулярным*, образом. Поэтому возмущения типа $\mu y''$, т. е. когда малый параметр входит как множитель при старшей производной, получили в литературе название *сингулярных возмущений*.

Простейшие примеры показывают, что сингулярно возмущенные системы обладают рядом свойств, коренным образом отличающих их от регулярно возмущенных систем, исследованных в § 1.

Рассмотрим уравнение

$$\mu y' = ay + b; \quad a = \text{const}, \quad b = \text{const}, \tag{7.12}$$

при начальном условии $y(0,\mu) = y^0$. Его точное решение имеет вид

$$y(t,\mu) = \left(y^0 + \frac{b}{a}\right)e^{at/\mu} - \frac{b}{a}. \tag{7.13}$$

Полагая в уравнении (7.12) $\mu = 0$, получим (применяя обозначения § 1) $\bar{y} = -b/a$. Анализируя (7.13), можно видеть, что близость y к $\bar{y}$ имеет место лишь при выполнении некоторых *специальных* условий, о которых не было речи в § 1. А именно, если рассматривать решение начальной задачи вправо от $t = 0$, то $y \to \bar{y}$, если $a < 0$, а $\mu \to +0$ (или $a > 0$, а $\mu \to -0$). Если же $\mu \to 0$ произвольным образом, то ни при $a < 0$, ни при $a > 0$ решение y предела не имеет и является неограниченным. Кроме того, если даже выполнены условия $a < 0$, $\mu \to +0$ (или $a > 0$, $\mu \to -0$), предельный переход $y \to \bar{y}$ имеет место для t, строго больших нуля, так как при $t = 0$ $y(0,\mu) = y^0$, а y^0, вообще говоря, не равно $-b/a$.

Все эти факты говорят о том, что в сингулярно возмущенных системах пренебрегать малыми членами можно лишь при выполнении особых условий и выяснение этих условий требует специальной теории, к которой мы и перейдем.

1. Уравнение с малым параметром при старшей производной. Теорема о предельном переходе. Рассмотрим систему дифференциальных уравнении вида

$$\mu\frac{dz}{dt} = F(z,y,t), \quad \frac{dy}{dt} = f(z,y,t), \tag{7.14}$$

где $\mu > 0$ является малым параметром. Поставим начальную задачу

$$z(0,\mu) = z^0, \quad y(0,\mu) = y^0. \tag{7.15}$$

Начальная задача для уравнения (7.11), очевидно, содержится здесь как частный случай.

1°. Правые части (7.14) будем предполагать непрерывными вместе с частными производными по z и y в некоторой области

$$H = \{(y, t) \in \bar{D} = \{0 \leqslant t \leqslant T,\ |y| \leqslant b\},\quad |z| < d\}.$$

Полагая в (7.14) формально $\mu = 0$, получим невозмущенную систему уравнений, или, как ее называют в теории сингулярных возмущений, *вырожденную систему*, так как ее порядок ниже, чем порядок системы (7.14):

$$0 = F(z, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = f(z, y, t). \tag{7.16}$$

Чтобы определить решение этой системы, надо, прежде всего, разрешить относительно z первое из уравнений (7.16), которое является конечным (не дифференциальным). Это уравнение нелинейное и поэтому может иметь несколько решений. Мы будем предполагать, что все решения (корни) $z = \varphi(y, t)$ этого уравнения действительны и изолированы в $\bar{D}$. Надо выбрать один из корней $z = \varphi(y, t)$ и подставить его во второе уравнение (7.16). Вопрос заключается в том, какой из корней следует выбрать, чтобы обеспечить близость конструируемого нами решения системы (7.16) к решению $z(t, \mu)$, $y(t, \mu)$ задачи (7.14), (7.15). Правило выбора корня $\varphi(y, t)$ будет сформулировано ниже (см. 3°, 5°). После подстановки $z = \varphi(y, t)$ во второе уравнение (7.16) получится дифференциальное уравнение относительно y и для однозначного определения y потребуется задать начальное условие. Естественно предположить, что из двух начальных условий (7.15) следует оставить лишь одно: условие на y. Итак, мы приходим к задаче

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = f(\varphi(\bar{y}, t), \bar{y}, t), \quad \bar{y}(0) = y^0, \tag{7.17}$$

где $\varphi(y, t)$ — один из корней уравнения $F(z, y, t) = 0$.

2°. Будем предполагать, что функция $\varphi(y, t)$ непрерывна вместе с производной по y, когда $(y, t) \in \bar{D}$.

Определение. Корень $z = \varphi(y, t)$ будем называть *устойчивым в области* $\bar{D}$, если при $(y, t) \in \bar{D}$ выполняется неравенство

$$\frac{\partial F}{\partial z}(\varphi(y, t), y, t) < 0. \tag{7.18}$$

Замечание. Ср. с требованием $a < 0$ в рассмотренном выше примере.

3°. Будем предполагать, что в (7.17) $\varphi(y,t)$ является устойчивым корнем.

4°. Будем предполагать, что решение $\bar{y}(t)$ задачи (7.17) определено на сегменте $0 \leqslant t \leqslant T$ и принадлежит $D = \{0 \leqslant t \leqslant T,\ |y| < b\}$.

Прежде чем производить дальнейшее исследование задачи, рассмотрим один частный случай, а именно:

$$\mu \frac{dz}{dt} = F(z), \quad z(0,\mu) = z^0. \tag{7.19}$$

Этот случай, во-первых, интересен своей геометрической наглядностью, а во-вторых, соответствующие результаты пригодятся при рассмотрении общего случая (7.14).

Пусть $z = \varphi$ является устойчивым корнем уравнения $F(z) = 0$. В данном случае φ является константой, а D — любым интервалом вещественной оси. Условие устойчивости (7.18) имеет вид $\frac{dF}{dz}(\varphi) < 0$. Пусть кроме φ уравнение $F(z) = 0$ имеет еще корни $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, причем φ_1 и φ_2 — два ближайших к φ корня соответственно снизу и сверху (рис. 20, на котором представлена полоса $0 \leqslant t \leqslant T$, где T — любое положительное число). Проследим за полем направлений уравнения (7.19). При достаточно малом μ векторы, касательные к интегральным кривым, расположены почти параллельно оси z (за исключением малой окрестности корней уравнения $F(z) = 0$). «+» и «−» на рисунке указывают знак функции $F(z)$. Заметим, что, поскольку $\frac{dF}{dz}(\varphi) \neq 0$, корень φ является простым и при $z = \varphi$ происходит смена знака функции $F(z)$.

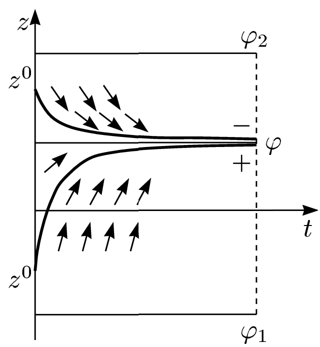

Рис. 20

Пусть $\varphi_1 < z^0 < \varphi_2$. Рассмотрим множество точек $|z - \varphi| \leqslant \varepsilon$, где ε произвольно мало (ε-окрестность корня φ). Характер поля направлений сразу дает возможность заключить, что интегральная кривая, начинающаяся в точке $(0, z^0)$ (на рисунке приведены два варианта: $z^0 < \varphi$ и $z^0 > \varphi$), будет резко идти вверх (при $z^0 < \varphi$) или, наоборот, вниз (при $z^0 > \varphi$) и, достигнув ε-окрестности φ, далее из нее уже не выйдет, если только μ достаточно мало. Это и означает, что решение $z(t,\mu)$ задачи (7.19) при $\mu \to 0$ близко к решению φ вырожденного уравнения $F(z) = 0$, если не считать некоторой окрестности $t = 0$ (см. пример).

Из этого геометрического рассмотрения ясно также, насколько важно, чтобы начальное значение z^0 лежало в области $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, называемой *областью влияния* (или *областью притяжения*) корня φ. Если, например, $z^0 < \varphi_1$ и $F < 0$ при $z < \varphi_1$, то интегральная кривая уйдет вниз от φ_1 и тем самым не может приблизиться к φ, а если $z^0 < \varphi_1$ и $F > 0$, то кривая приблизится к φ_1, т. е. опять-таки, не к φ.

Результат, полученный нами из геометрических соображений, можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 7.3. *Если φ — устойчивый корень уравнения $F(z)=0$, а начальное значение z^0 лежит в его области влияния, то решение $z(t,\mu)$ задачи (7.19) существует на сегменте $[0,T]$ и для него имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{\mu\to 0} z(t,\mu) = \varphi \quad \textit{при} \quad 0 < t \leqslant T. \tag{7.20}$$

Доказательство. Приведем аналитическое доказательство утверждения (7.20). Пусть для определенности $z^0 < \varphi$. Рассмотрим прежде всего область $z^0 \leqslant z \leqslant \varphi - \varepsilon$, $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ произвольно мало. В этой области рассмотрим задачу (7.19), беря z в качестве независимого переменного: $\dfrac{dt}{dz} = \mu \dfrac{1}{F(z)}$, $t(z^0) = 0$. Если μ достаточно мало, то, как следует из теоремы 7.2, на сегменте $[z^0, \varphi - \varepsilon]$ существует единственное решение $t(z)$ этой задачи и оно сколь угодно близко к вертикали $t = 0$ (в смысле расстояния вдоль оси t). Кроме того, оно положительно в силу положительности $F(z)$. Таким образом, интегральная кривая, начинающаяся в точке $(0, z^0)$, входит в ε-окрестность $z = \varphi$ при $t = t_0$, где $t_0 = \omega(\mu) < \varepsilon$.

Нетрудно убедиться, что, попав в ε-окрестность $z = \varphi$, интегральная кривая из нее уже не выйдет, пока $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Для этого воспользуемся рассуждениями, подобными тем, которые проводились в теории устойчивости (гл. 5). Введем функцию $V(z) = (z - \varphi)^2$. Предположим, что интегральная кривая при $t = t_1 > t_0$ выходит из ε-окрестности прямой $z = \varphi$. Тогда имеем $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{t=t_1} \geqslant 0$. Но, с другой стороны,

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=t_1} = 2[z(t_1,\mu) - \varphi]\,\frac{F(z(t_1,\mu))}{\mu} < 0$$

в силу свойства $F(z) \gtreqless 0$ при $z \lesseqgtr \varphi$, обеспеченного условием устойчивости $\dfrac{dF}{dz}(\varphi) < 0$. Противоречие приводит к выводу, что интегральная кривая останется в ε-окрестности $z = \varphi$. Так как она попадает в эту окрестность при $t = t_0 < \varepsilon$, то в силу произвольной малости ε это фактически означает справедливость (7.20).

Утверждение (7.20) можно записать также в следующей удобной для дальнейшего форме.

Введем независимое переменное $\tau = t/\mu$. Тогда задача (7.19) примет вид

$$\frac{dz}{d\tau} = F(z), \quad z(0) = z^0. \tag{7.21}$$

Утверждение (7.20) означает, что $\lim_{\tau\to\infty} z(\tau) = \varphi$, или, иначе, для любого ε существует $\tau_0(\varepsilon)$ такое, что при $\tau \geqslant \tau_0$ справедливо неравенство

$$|z(\tau) - \varphi| < \varepsilon. \tag{7.22}$$

Замечания.

1. Как видно из проведенных рассуждении, предельный переход (7.20) не является равномерным относительно $t \in (0, T]$, что хорошо иллюстрируется рис. 20.

2. Термин «устойчивый корень» не является случайным. Нетрудно проследить связь проделанных построений с теорией устойчивости (см. гл. 5). Действительно, $z = \varphi$ является точным решением уравнения (7.21), причем, в силу $\dfrac{\partial F}{\partial z}(\varphi) < 0$, это решение асимптотически устойчиво по Ляпунову. Чтобы убедиться в этом, достаточно сделать замену переменных $x = z - \varphi$ и воспользоваться теоремой 5.1 или теоремой 5.3, взяв в качестве функции Ляпунова $V = x^2$. То, что интегральная кривая $z = z(\tau)$ остается в ε-окрестности прямой $z = \varphi$, обеспечено устойчивостью решения $z = \varphi$ уравнения $\dfrac{dz}{d\tau} = F(z)$.

Вернемся к общему случаю (7.14), (7.15). При рассмотрении этого случая идеи теории устойчивости будут сочетаться с идеями теории регулярных возмущений.

Сопоставим задаче (7.14), (7.15) задачу

$$\mu\frac{dz_0}{dt} = F(z_0, y^0, 0), \quad z_0(0) = z^0. \tag{7.23}$$

Эта задача является исследованной уже задачей типа (7.19). В силу 3° значение $z_0 = \varphi(y^0, 0)$ является устойчивым корнем уравнения $F(z_0, y^0, 0) = 0$.

5°. Будем предполагать, что начальное значение z^0 принадлежит области влияния корня $\varphi(y^0, 0)$ уравнения $F(z_0, y^0, 0) = 0$.

Теорема 7.4 (теорема Тихонова). *При выполнении условий 1°–5° решение $z(t, \mu)$, $y(t, \mu)$ задачи* (7.14), (7.15) *существует на* $[0, T]$ *и имеет место предельный переход*

$$\lim_{\mu\to 0} y(t, \mu) = \bar{y}(t) \qquad \textit{при} \ \ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{7.24}$$

$$\lim_{\mu\to 0} z(t, \mu) = \varphi(\bar{y}(t), t) \equiv \bar{z}(t) \qquad \textit{при} \ \ 0 < t \leqslant T, \tag{7.25}$$

где $\bar{y}(t)$ — решение вырожденной задачи (7.17).

Доказательство разобьем на несколько этапов.

1) Рассмотрим сначала окрестность точки $t = 0$. Сделаем в (7.14) замену переменных $\tau = 1/\mu$. Получим

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= F(z, y, \tau\mu), \quad z|_{\tau=0} = z^0, \\ \frac{dy}{d\tau} &= \mu f(z, y, \tau\mu), \quad y|_{\tau=0} = y^0. \end{aligned} \tag{7.26}$$

На любом конечном промежутке изменения τ эту систему можно рассматривать как регулярно возмущенную, причем соответствующая невозмущенная система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dz_0}{d\tau} &= F(z_0, y_0, 0), \quad z_0|_{\tau=0} = z^0, \\ \frac{dy_0}{d\tau} &= 0, \quad y_0|_{\tau=0} = y^0. \end{aligned} \tag{7.27}$$

Отсюда $y_0(\tau) \equiv y^0$, а

$$\frac{dz_0}{d\tau} = F(z_0, y^0, 0), \quad z_0|_{\tau=0} = z^0. \tag{7.28}$$

Эта задача равносильна задаче (7.23) и является задачей типа (7.21). Поэтому согласно теореме 7.3 (см. (7.22)) получим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\tau_0(\varepsilon)$, при котором справедливо неравенство

$$|z_0(\tau_0) - \varphi(y^0, 0)| < \varepsilon/3. \tag{7.29}$$

Сравним задачи (7.26) и (7.27). Из 1° следует выполнение условий теоремы 7.2 о регулярном возмущении для $\tau \leqslant \bar{\tau}$, где $\bar{\tau}$ как угодно велико и фиксировано. Решение невозмущенной задачи (7.27) определено при всех τ и, в частности, на $[0, \tau_0]$. Поэтому согласно теореме 7.2 (вместе с замечанием 1) получим, что для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно малых μ на $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$ (или на $0 \leqslant t \leqslant \tau_0\mu$) существует решение задачи (7.26) (или, что то же самое, решение $z(t, \mu)$, $y(t, \mu)$ задачи (7.14), (7.15)) и справедливы неравенства

$$|z(t, \mu) - z_0(\tau)| < \varepsilon/3, \quad |y(t, \mu) - y^0| < \varepsilon/3. \tag{7.30}$$

Принимая во внимание непрерывность $\varphi(y, t)$, можно, обеспечив достаточную малость $|y(t, \mu) - y^0|$, обеспечить также неравенство

$$|\varphi(y(t, \mu), t) - \varphi(y^0, 0)| < \varepsilon/3 \ \text{ при } \ 0 \leqslant t \leqslant \tau_0\mu. \tag{7.31}$$

Из (7.29)–(7.31) получим, что при $t = \tau_0\mu = t_0(\mu)$

$$|z(t, \mu) - \varphi(y(t, \mu), t)| < \varepsilon. \tag{7.32}$$

2) Обозначим $\Delta(t,\mu) = z(t,\mu) - \varphi(y(t,\mu),t)$. Соотношение (7.32) говорит о том, что $\Delta(t,\mu)$ как угодно мало при $t = t_0(\mu)$. Неравенство (7.32) будет оставаться выполненным в некоторой окрестности справа от точки t_0. Величина этой окрестности заранее неизвестна. Может случиться, что неравенство (7.32) выполнено для всех $t \geqslant t_0$ вплоть до $t = T$, а может оказаться, что найдется значение $t_1 \leqslant T$, при котором (7.32) перейдет в равенство. Убедимся, что в первом случае при всех $t \in [t_0, T]$, а во втором при всех $t \in [t_0, t_1]$ величина $y(t,\mu)$ как угодно близка к $\bar{y}(t)$. Для этого перепишем второе уравнение (7.14) в виде

$$\frac{dy}{dt} = f\big(\varphi(y,t) + \Delta(t,\mu), y, t\big), \quad y|_{t=t_0(\mu)} = y^0 + \delta(\mu), \tag{7.33}$$

и сравним эту задачу с задачей (7.17). Согласно полученному в предыдущем пункте величины $t_0(\mu)$, $|\delta(\mu)|$ как угодно малы при достаточно малом μ и величина $|\Delta(t,\mu)|$ как угодно мала при достаточно малом μ и $t \in [t_0, T]$ или $t \in [t_0, t_1]$. Задача (7.33) является регулярно возмущенной задачей по отношению к задаче (7.17) (см. теорему 7.2 вместе с замечанием 2). Поэтому при $t \in [t_0, T]$ или $t \in [t_0, t_1]$ функция $y(t,\mu)$ существует, принадлежит D и, кроме того, для любого $\varepsilon_1 > 0$ справедливо неравенство $|y(t,\mu) - \bar{y}(t)| < \varepsilon_1$ при $t \in [t_0, T]$ или $t \in [t_0, t_1]$, если только μ достаточно мало.

3) Убедимся теперь, что неравенство (7.32) выполнено для всех $t \in [t_0, T]$, т. е. из двух возможностей, указанных в 2), реализуется только одна, а предположение о существовании точки $t_1 \leqslant T$, для которой $|\Delta(t,\mu)| = \varepsilon$ приводит к противоречию.

Пусть при $t_1 \leqslant T$ достигается равенство $|\Delta(t,\mu)| = \varepsilon$. Введем в рассмотрение функцию

$$V(z,y,t) = [z - \varphi(y,t)]^2.$$

В силу предположения о точке t_1 имеем $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{t=t_1} \geqslant 0$. Но

$$\frac{dV}{dt} = 2\big[z - \varphi(y,t)\big]\left\{\frac{F(z,y,t)}{\mu} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} f(z,y,t) - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\}.$$

Так как $F(z,y,t)|_{t=t_1} \neq 0$, то знак $\{\cdot\}$ при достаточно малых μ определяется знаком $F(z,y,t)$, а, следовательно, при малых Δ главный член разложения F по $z - \varphi$ есть

$$\frac{\partial F}{\partial z}(\varphi(y,t), y, t)[z - \varphi(y,t)]$$

и знак всего выражения $\dfrac{dV}{dt}$ определяется знаком $\dfrac{\partial F}{\partial z}(\varphi(y,t), y, t)$. Так как согласно предыдущему пункту $y(t,\mu)$ принадлежит D, то согласно 3° и (7.18)

$$\frac{\partial F}{\partial z}(\varphi(y(t_1,\mu), t_1), y(t_1,\mu), t_1) < 0$$

и, следовательно, $\frac{dV}{dt}|_{t=t_1} < 0$.

Противоречие приводит к выводу, что $|\Delta(t,\mu)| < \varepsilon$ при $t_0 \leqslant t \leqslant T$ и, следовательно, $|y(t,\mu) - \bar{y}(t)| < \varepsilon_1$ при $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Учитывая оба эти неравенства, а также то, что $|y(t,\mu) - y^0| < \varepsilon/3$ при $0 \leqslant t \leqslant t_0$ (см. (7.30)) и $|\bar{y}(t) - y^0| < \varepsilon_1$ при $0 \leqslant t \leqslant t_0$, получим утверждение теоремы 7.4.

Замечания.

1. Из доказательства видно, что предельный переход (7.24) является равномерным на $[0,T]$, а предельный переход (7.25), справедливый на $(0,T]$, равномерным не является. В окрестности $t=0$ имеется область, в которой z-компонента решения задачи (7.14), (7.15) сильно отличается от z-компоненты решения вырожденной задачи, т. е. от $\varphi(\bar{y}(t),t)$. Эта область, хорошо заметная на рис. 20 для случая системы (7.21), называется *пограничным слоем.*

Заметим также (это опять видно из самого доказательства), что на отрезке $[t_0(\mu),T]$ (тем более на любом отрезке $[t_0,T]$, где t_0 как угодно мало, но фиксировано при $\mu \to 0$) оба предельных перехода (7.24) и (7.25) носят равномерный характер.

2. Из доказательства теоремы видно, что отрицательность $\frac{\partial F}{\partial z}$ нужна фактически лишь на вырожденном решении, т. е. достаточно, чтобы выполнялось условие $\frac{\partial F}{\partial z}\big(\varphi(\bar{y}(t),t),\bar{y}(t),t\big) < 0$.

3. Теорема 7.4 распространяется на векторный случай. Некоторые дополнительные трудности возникают при этом с определением понятия области влияния. Что касается условия устойчивости, то оно может быть сформулировано как естественное требование, чтобы характеристические числа $\lambda(t)$ матрицы $\frac{\partial F}{\partial z}\big(\varphi(\bar{y},t),\bar{y},t\big)$ удовлетворяли неравенству $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Имеется и более общая формулировка условия устойчивости, данная А. Н. Тихоновым [11].

2. Асимптотическое разложение решения задачи (7.14), (7.15). На основании теоремы 7.4 можно написать следующее асимптотическое представление для решения задачи (7.14), (7.15):

$$y(t,\mu) = \bar{y}(t) + \varepsilon_1(t,\mu), \quad z(t,\mu) = \bar{z}(t) + \varepsilon_2(t,\mu),$$
$$(\bar{z}(t) \equiv \varphi(\bar{y}(t),t)).$$

При этом остаточный член $\varepsilon_2(t,\mu)$ в выражении для $z(t,\mu)$ не является равномерно малой величиной. Естественно предположить, что если к $\bar{z}(t)$ добавить разность $z_0(\tau) - \varphi(y^0,0)$, то получится формула $z(t,\mu) = \bar{z}(t) + z_0(\tau) - \varphi(y^0,0) + \varepsilon_3(t,\mu)$, где $\varepsilon_3(t,\mu) \rightrightarrows 0$ на $[0,T]$. Убедимся, что это действительно так. Величина $\varepsilon_3(t,\mu) = z(t,\mu) - \bar{z}(t) -$

$-z_0(\tau) + \varphi(y^0, 0)$. Разобьем отрезок $[0, T]$ на два участка $[0, t_0(\mu)]$ и $[t_0(\mu), T]$, где $t_0(\mu) = \tau_0\mu$ — величина, введенная при доказательстве теоремы 7.4, τ_0 достаточно велико и фиксировано при $\mu \to 0$. На $[0, t_0(\mu)]$ представим ε_3 в виде

$$\varepsilon_3(t,\mu) = [z(t,\mu) - z_0(\tau)] - [\bar{z}(t) - \varphi(y^0, 0)].$$

Здесь $|z(t,\mu) - z_0(\tau)| < \varepsilon/2$ при $\mu \to 0$ (это то же самое, что (7.30)), а

$$|\bar{z}(t) - \varphi(y^0, 0)| = |\bar{z}(t) - \bar{z}(0)| < \varepsilon/2,$$

так как $t_0(\mu) \to 0$ при $\mu \to 0$. Следовательно, на $[0, t_0(\mu)]$ имеем $|\varepsilon_3| < \varepsilon$ равномерно относительно t при $\mu \to 0$. На $[t_0(\mu), T]$ представим ε_3 в виде

$$\varepsilon_3(t,\mu) = [z(t,\mu) - \bar{z}(t)] - [z_0(\tau) - \varphi(y^0, 0)].$$

Здесь $|z(t,\mu) - \bar{z}(t)| < \varepsilon/2$ (см. замечание 1 к теореме 7.4 о равномерности предельного перехода (7.25) на $[t_0(\mu), T]$). И точно так же $|z_0(\tau) - \varphi(y^0, 0)| < \varepsilon/2$, поскольку это то же неравенство, но для частного случая (7.23), т. е. и на $[t_0(\mu), T]$ имеем $|\varepsilon_3| < \varepsilon$ равномерно относительно t при $\mu \to 0$. Таким образом, $\varepsilon_3(t,\mu) \rightrightarrows 0$ при $\mu \to 0$ на $[0, T]$.

Заметим, что разность $z_0(\tau) - \varphi(y^0, 0)$ осуществляет поправку на «потерю» начального условия $z(0,\mu) = z^0$, которому не может удовлетворить $\bar{z}(t)$. Выражение $\bar{z}(t) + z_0(\tau) - \varphi(y^0, 0)$ уже будет удовлетворять начальному условию при $t = 0$.

Ниже будет доказано, что $\varepsilon_1(t,\mu) = O(\mu)$, $\varepsilon_2(t,\mu) = O(\mu)$ (теорема 7.5). Более того, при достаточной гладкости правых частей (7.14) можно построить асимптотическое представление для решения задачи (7.14), (7.15) с остаточным членом $O(\mu^{n+1})$, но в отличие от регулярного случая (см. теорему 7.1) это представление будет, помимо степенных по μ (или *регулярных*) *членов* содержать некоторые функции (так называемые *пограничные члены*), зависящие от μ *не степенным образом*; пограничные члены имеют заметную величину в окрестности $t = 0$, а далее с ростом t быстро убывают. Введенная выше разность $z_0(\tau) - \varphi(y^0, 0)$ представляет собой пограничный член в асимптотической формуле с остаточным членом $O(\mu)$.

После этих предварительных замечаний перейдем непосредственно к описанию общего алгоритма построения асимптотики решения сингулярно возмущенной задачи (7.14), (7.15).

Представим z и y в виде суммы двух формальных рядов (здесь и в дальнейшем под x будем понимать z и y в совокупности, т. е.

если выписывается некоторое соотношение для x, то это значит, что имеют место два в точности таких же соотношения для z и y)

$$x = \bar{x}(t,\mu) + \Pi x(\tau,\mu), \tag{7.34}$$

где

$$\bar{x}(t,\mu) = \bar{x}_0(t) + \mu\bar{x}_1(t) + \ldots \tag{7.35}$$

— так называемый *регулярный ряд* (ср. (7.6)), т. е. ряд по степеням μ с коэффициентами, зависящими от t, а

$$\Pi x(\tau,\mu) = \Pi_0 x(\tau) + \mu\Pi_1 x(\tau) + \ldots \tag{7.36}$$

— так называемый *пограничный ряд*, представляющий собой также ряд по степеням μ, но с коэффициентами, зависящими от τ. Члены этого ряда называются *пограничными членами.*

Подставим (7.34) в (7.14), умножив для симметрии второе уравнение на μ:

$$\begin{aligned} &\mu\frac{d\bar{z}}{dt} + \frac{d}{d\tau}\Pi z = F(\bar{z}+\Pi z, \bar{y}+\Pi y, t),\\ &\mu\frac{d\bar{y}}{dt} + \frac{d}{d\tau}\Pi y = \mu f(\bar{z}+\Pi z, \bar{y}+\Pi y, t). \end{aligned} \tag{7.37}$$

Введем величины $\bar{F}$ и ΠF, полагая

$$\begin{aligned} \bar{F} =& F\big(\bar{z}(t,\mu), \bar{y}(t,\mu), t\big),\\ \Pi F =& F\big(\bar{z}(\tau\mu,\mu) + \Pi z(\tau,\mu), \bar{y}(\tau\mu,\mu) + \Pi y(\tau,\mu), \tau\mu\big) -\\ & - F\big(\bar{z}(\tau\mu,\mu), \bar{y}(\tau\mu,\mu), \tau\mu\big) \end{aligned}$$

(аналогичные величины $\bar{f}$ и Πf введем для f). Тогда (7.37) запишется в виде

$$\mu\frac{d\bar{z}}{dt} + \frac{d}{d\tau}\Pi z = \bar{F} + \Pi F, \quad \mu\frac{d\bar{y}}{dt} + \frac{d}{d\tau}\Pi y = \mu(\bar{f} + \Pi f). \tag{7.38}$$

Разложим теперь F и ΠF формально по степеням μ (коэффициенты этих разложений будут зависеть от t и τ соответственно): $\bar{F} = \bar{F}_0 + \mu\bar{F}_1 + \ldots$, $\Pi F = \Pi_0 F + \mu\Pi_1 F + \ldots$, после чего в (7.38) приравняем коэффициенты при одинаковых степенях μ, причем отдельно — зависящие от t и отдельно — зависящие от τ:

$$\frac{d}{dt}\bar{z}_{k-1} = \bar{F}_k, \qquad \frac{d}{dt}\bar{y}_k = \bar{f}_k; \tag{7.39}$$

$$\frac{d}{d\tau}\Pi_k z = \Pi_k F, \qquad \frac{d}{d\tau}\Pi_k y = \Pi_{k-1} f. \tag{7.40}$$

Тем самым мы получили уравнения для определения членов разложений (7.35) и (7.36).

Выпишем эти уравнения более детально для $k = 0$. Имеем

$$0 = \bar{F}_0 \equiv \bar{F}(\bar{z}_0, \bar{y}_0, t), \quad \frac{d\bar{y}_0}{dt} = f(\bar{z}_0, \bar{y}_0, t). \tag{7.41}$$

Эта система совпадает, как и следовало ожидать, с вырожденной системой (7.16). Имеем также (учитывая первое из уравнений (7.41))

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\Pi_0 z = \Pi_0 F \equiv F\big(\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y, 0\big) - F\big(\bar{z}_0(0), \bar{y}_0(0), 0\big) \equiv \\ \equiv F\big(\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y, 0\big), \\ \frac{d}{d\tau}\Pi_0 y = 0. \end{aligned} \tag{7.42}$$

Начиная с $k = 1$, уравнения (7.39) и (7.40) будут линейными относительно $\bar{z}_k$, $\bar{y}_k$ и $\Pi_k z$, $\Pi_k y$. Обратим внимание на то, что система (7.39) не содержит производной от $\bar{z}_k$, а только производную от $\bar{y}_k$, а система (7.40) имеет ту особенность, что второе уравнение в ней отделяется, так как его правая часть содержит члены только предыдущих номеров.

Для того чтобы из полученных уравнений (7.39), (7.40) определить члены разложений (7.35), (7.36), нужно задать начальные условия. Для этого подставим (7.34) в (7.15):

$$\bar{x}_0(0) + \mu\bar{x}_1(0) + \dots + \Pi_0 x(0) + \mu\Pi_1 x(0) + \dots = x^0 \tag{7.43}$$

и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях μ в обеих частях этих равенств. Приравнивание коэффициентов при нулевой степени μ дает

$$\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z(0) = z^0, \quad \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(0) = y^0. \tag{7.44}$$

Рассмотрим второе из этих равенств. Без каких-либо дополнительных соображений из него нельзя определить $\bar{y}_0(0)$ и $\Pi_0 y(0)$. Однако на пограничные члены, которые призваны играть роль поправок в окрестности $t = 0$, а при $t > 0$ стремиться к нулю вместе с μ, следует наложить дополнительное условие $\Pi_i x \to 0$ при $\tau \to \infty$. Отсюда приходим к выводу, что $\Pi_0 y(0) = 0$, так как иначе (см. (7.42)) $\Pi_0 y(\tau) \equiv \Pi_0 y(0) = \text{const} \not\to 0$. А тогда из (7.44)

$$\bar{y}_0(0) = y^0. \tag{7.45}$$

При этом условии решаем систему (7.41) и получаем, что $\bar{z}_0(t)$, $\bar{y}_0(t)$ совпадают с решением $\bar{z}(t)$, $\bar{y}(t)$, которое уже встречалось в теореме 7.4. Из (7.41) получим $\bar{z}_0(0) = \varphi(\bar{y}(0), 0) = \varphi(y^0, 0)$, а тогда первое из равенств (7.44) дает начальное условие для $\Pi_0 z$. Итак, начальные условия для системы (7.42) имеют вид

$$\Pi_0 y(0) = 0, \quad \Pi_0 z(0) = z^0 - \bar{z}_0(0) = z^0 - \varphi(y^0, 0). \tag{7.46}$$

Поэтому $\Pi_0 y(\tau) \equiv 0$, а $\Pi_0 z(\tau)$ является решением следующей начальной задачи:

$$\begin{gathered} \frac{d}{d\tau}\Pi_0 z = F\big(\varphi(y^0, 0) + \Pi_0 z, y^0, 0\big), \\ \Pi_0 z(0) = z^0 - \varphi(y^0, 0). \end{gathered} \tag{7.47}$$

Сравнивая задачу (7.47) с задачей (7.28), нетрудно установить, что $\Pi_0 z = z_0(\tau) - \varphi(y^0, 0)$. Об этой разности уже шла речь выше перед началом описания общего алгоритма. Полученное выше неравенство (7.29) означает, что $\Pi_0 z(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$.

Итак, нулевые члены разложений (7.35), (7.36) полностью определены.

Приравнивая в (7.43) коэффициенты при первой степени μ, будем иметь

$$\bar{z}_1(0) + \Pi_1 z(0) = 0, \qquad \bar{y}_1(0) + \Pi_1 y(0) = 0. \tag{7.48}$$

Кроме того, нужно воспользоваться условием $\Pi_1 y \to 0$ при $\tau \to \infty$. Из второго уравнения (7.40) (при $k = 1$) имеем

$$\Pi_1 y(\tau) = \Pi_1 y(0) + \int\limits_0^\tau \Pi_0 f\, ds,$$

откуда в силу условия на $\Pi_1 y$ при $\tau \to \infty$ следует

$$\Pi_1 y(0) = -\int\limits_0^\infty \Pi_0 f\, ds. \tag{7.49}$$

Сходимость появившегося здесь интеграла будет доказана ниже (см. (7.54)) и вообще все выкладки ведутся пока формально. С учетом (7.49) для $\Pi_1 y$ получим

$$\Pi_1 y(\tau) = -\int\limits_\tau^\infty \Pi_0 f\, ds. \tag{7.50}$$

Из второго равенства (7.48) теперь следует

$$\bar{y}_1(0) = \int\limits_0^\infty \Pi_0 f\, ds. \tag{7.51}$$

Это и будет начальным условием для системы (7.39) при $k = 1$, откуда определятся $\bar{y}_1(t)$, $\bar{z}_1(t)$. После этого из второго равенства (7.48) получим

$$\Pi_1 z(0) = -\bar{z}_1(0). \tag{7.52}$$

Это условие позволяет найти $\Pi_1 z$ из первого уравнения (7.40) при $k = 1$, поскольку $\Pi_1 y$ уже определено.

Совершенно аналогично определяются $\Pi_k y$, $\bar{y}_k, \bar{z}_k$, $\Pi_k z$ $(k = 2, 3, \ldots)$ из системы (7.39), (7.40) с помощью дополнительных условий

$$\Pi_k x \to 0 \quad \text{при } k \to \infty,$$
$$\bar{y}_k(0) = \int_0^\infty \Pi_{k-1} f \, d\tau, \quad \Pi_k z(0) = -\bar{z}_k(0). \tag{7.53}$$

Тем самым описание построения ряда (7.34) закончено.

В теории сингулярных возмущений доказывается, что для $\Pi_k x$ имеет место оценка

$$|\Pi_k x| < Ce^{-\varkappa t/\mu}, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{7.54}$$

где $C > 0$, $\varkappa > 0$ — некоторые постоянные. Эта оценка означает экспоненциальное стремление $\Pi_k x$ к нулю при $\tau \to \infty$, это же неравенство обеспечивает сходимость интегралов в (7.53).

Основное утверждение, относящееся к только что проведенным построениям, заключается в том, что ряд (7.34) является асимптотическим рядом для решения $x(t, \mu)$ задачи (7.14), (7.15), а именно, в теории сингулярных возмущений доказывается, что разность между $x(t, \mu)$ и n-й частичной суммой ряда (7.34) имеет порядок $O(\mu^{n+1})$.

Таково обобщение теоремы 7.1 на сингулярно возмущенную систему. Подробнее с этим можно ознакомиться в книге [11].

Приведем доказательство асимптотического представления для решения задачи (7.14), (7.15) с остаточным членом $\mathcal{O}(\mu)$, а именно, докажем, что $z(t, \mu) = \bar{z}_0(t) + \Pi_0 z + \mathcal{O}(\mu)$, $y(t, \mu) = \bar{y}_0(t) + \mathcal{O}(\mu)$. Доказательство представления с остаточным членом $\mathcal{O}(\mu^{n+1})$ сложнее лишь в чисто техническом отношении.

Дадим формулировку соответствующей теоремы.

Теорема 7.5. *Пусть выполнены условия:*

1°. *$F(z, y, t)$ и $f(z, y, t)$ непрерывны по совокупности аргументов в некоторой области H.*

2°. *На сегменте $[0, T]$ определено решение $\bar{y}_0(t)$, $\bar{z}_0(t)$ задачи (7.41), (7.45), и это решение принадлежит H.*

3°. *$F_z\big(\bar{z}_0(t), \bar{y}_0(t), t\big)$ существует, непрерывна и отрицательна при $\varphi(y^0, 0)$.*

4°. *z^0 принадлежит области влияния $\varphi(y^0, 0)$.*

5°. *При* $0 \leqslant t \leqslant T$, $|\Delta| < \varepsilon$, $|\delta| < \varepsilon$ (ε — *некоторое, может быть, достаточно малое, но фиксированное, не зависящее от* μ *число*) *функции* $F(\bar{z}_0 + \Pi z + \Delta, \bar{y}_0 + \delta, t)$, $f(\bar{z}_0 + \Pi_0 z + \Delta, \bar{y}_0 + \delta, t)$ *непрерывны вместе с производными до второго порядка включительно по* Δ *и* δ.

Тогда на $0 \leqslant t \leqslant T$ *справедливы равномерные относительно* t *оценки*

$$z(t, \mu) - \bar{z}_0(t) - \Pi_0 z(t/\mu) = \mathcal{O}(\mu), \tag{7.55}$$

$$y(t, \mu) - \bar{y}_0(t) = \mathcal{O}(\mu). \tag{7.56}$$

Доказательство теоремы основано на нескольких леммах.

Лемма 7.1. *Имеет место неравенство*

$$|\Pi_0 z| < Ce^{-\varkappa t/\mu}, \tag{7.57}$$

где $C > 0$, $\varkappa > 0$ — *некоторые постоянные.*

Доказательство. Мы уже видели выше, что $\Pi_0 z \to 0$ при $\tau \to \infty$. Сейчас требуется лишь уточнить характер этого стремления к нулю. Обратим внимание на то, что (7.57) — это (7.54) при $x = z$, $k = 0$. Из (7.47) имеем (напомним, что $\varphi(y^0, 0) = \bar{z}_0(0)$, $y^0 = \bar{y}_0(0)$)

$$\frac{d}{d\tau}\Pi_0 z = F_z\bigl(\bar{z}_0(0) + \theta\Pi_0 z, \bar{y}_0(0), 0\bigr)\Pi_0 z,$$

откуда

$$\Pi_0 z = \bigl[z^0 - \varphi(y^0, 0)\bigr]e^{\int\limits_0^\tau F_z(\bar{z}_0(0)+\theta\Pi_0 z, \bar{y}_0(0), 0)\, d\tau}.$$

Выберем τ_0 так, чтобы $\Pi_0 z$ для $\tau \geqslant \tau_0$ было достаточно малым, и фиксируем это τ_0. $\Pi_0 z$ должно быть малым настолько, чтобы как следствие 3° было выполнено неравенство $F_z(\bar{z}_0(0) + \theta\Pi_0 z, \bar{y}_0(0), 0) < -\varkappa < 0$. Имеем тогда

$$|\Pi_0 z| = |z^0 - \varphi(y^0, 0)|e^{\int\limits_0^{\tau_0} F_z\, d\tau} e^{\int\limits_{\tau_0}^{\tau} F_z\, d\tau} <$$
$$< |z^0 - \varphi(y^0, 0)|e^{\int\limits_0^{\tau_0} F_z\, d\tau} e^{-\varkappa(\tau - \tau_0)} < Ce^{-\varkappa\tau},$$

так как $\bigl|z^0 - \varphi(y^0, 0)\bigr|e^{\int\limits_0^{\tau_0} F_z\, d\tau} e^{\varkappa\tau_0} < C$.

Подставим в (7.14), (7.15) вместо точного решения главные члены асимптотики, т. е. выражения $\bar{z}_0 + \Pi_0 z$, $\bar{y}_0$. Подстановка дает

$$\begin{aligned} \mu\frac{d\bar{z}_0}{dt} + \frac{d}{d\tau}\Pi_0 z &= F(\bar{z}_0(t) + \Pi_0 z, \bar{y}_0(t), t) - R_1, \\ \frac{d\bar{y}_0}{dt} &= f(\bar{z}_0(t) + \Pi_0 z, \bar{y}_0(t), t) - R_2, \end{aligned} \tag{7.58}$$

где $-R_1$, $-R_2$ — соответствующие невязки.

Лемма 7.2. *Справедливы оценки*

$$R_1(t,\mu) = \mathcal{O}(\mu), \quad R_2(t,\mu) = \mathcal{O}(e^{-\varkappa t/\mu}).$$

Доказательство. Оценка для R_2 получается сразу из леммы 7.1, так как если учесть (7.41), то $R_2 = f_z(\bar{z}_0 + \theta\Pi_0 z,\, \bar{y}_0,\, t)\Pi_0 z$.

Чтобы получить оценку для R_1, достаточно убедиться, что $\widetilde{R}_1 = F(\bar{z}_0 + \Pi_0 z, \bar{y}_0, t) - \frac{d}{d\tau}\Pi_0 z = \mathcal{O}(\mu)$. Используя (7.47), представим $\widetilde{R}_1$ в виде

$$\widetilde{R}_1 = F(\bar{z}_0(t) + \Pi_0 z, \bar{y}_0(t), t) - F(\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z, \bar{y}_0(0), 0) = \\ = \Phi(\Pi_0 z, t) - \Phi(\Pi_0 z, 0) = t\int\limits_0^1 \Phi_t(\Pi_0 z, \theta t)\, d\theta.$$

Но

$$\Phi_t(\Pi_0 z, \theta t) = \\ = F_z(\bar{z}_0(\theta t) + \Pi_0 z, \bar{y}_0(\theta t), \theta t)\bar{z}_0'(\theta t) + F_y(\cdot)\bar{y}_0'(\theta t) + F_t(\cdot) = \\ = F_{zz}(\bar{z}_0(\theta t) + \theta_1\Pi_0 z, \bar{y}_0(\theta t), \theta t)\bar{z}_0'(\theta t)\Pi_0 z.$$

Здесь учтено, что $F(\bar{z}_0, \bar{y}_0, t) \equiv 0$, и, следовательно,

$$F_z(\bar{z}_0, \bar{y}_0, t)\bar{z}_0' + F_y(\cdot)\bar{y}_0' + F_t(\cdot) = 0.$$

Отсюда

$$|\widetilde{R}_1| < t|F_{zz}|\,|z_0'|\,|\Pi_0 z| < Cte^{-\varkappa t/\mu} < C\mu,$$

так как $\sup_t(te^{-\varkappa t/\mu}) = \mu e^{-1}/\varkappa$. Здесь постоянная $Ce^{-1}/\varkappa$ вновь обозначена через C. Условимся в дальнейшем все не зависящие от μ постоянные обозначать одной и той же буквой C, за исключением отдельных случаев, как это уже делалось в § 2 гл. 5.

Доказательство теоремы 7.5. Положим $\Delta = z - \bar{z}_0 - \Pi_0 z$, $\delta = y - \bar{y}_0$. Вычитая (7.58) из (7.14), получим

$$\begin{aligned} \mu\frac{d\Delta}{dt} &= F(\bar{z}_0 + \Pi_0 z + \Delta, \bar{y}_0 + \delta, t) - F(\bar{z}_0 + \Pi_0 z, \bar{y}_0, t) + R_1, \\ \frac{d\delta}{dt} &= f(\bar{z}_0 + \Pi_0 z + \Delta, \bar{y}_0 + \delta, t) - f(\bar{z}_0 + \Pi_0 z, \bar{y}_0, t) + R_2. \end{aligned} \tag{7.59}$$

Очевидно,

$$\Delta(0,\mu) = 0, \quad \delta(0,\mu) = 0. \tag{7.60}$$

Систему уравнений (7.59) можно переписать в виде

$$\mu\frac{d\Delta}{dt} = a_{11}\Delta + a_{12}\delta + R_1, \quad \frac{d\delta}{dt} = a_{21}\Delta + a_{22}\delta + R_2, \tag{7.61}$$

где

$$a_{11}(\Delta,\delta,t,\mu)=\int\limits_0^1 F_z(\bar z_0+\Pi_0 z+\theta\Delta,\bar y_0+\delta,t)\,d\theta,$$

$$a_{12}(\Delta,\delta,t,\mu)=\int\limits_0^1 F_y(\bar z_0+\Pi_0 z,\bar y_0+\delta,t)\,d\theta,$$

a_{21} и a_{22} имеют аналогичную структуру. Равенство правых частей (7.59) и (7.61) легко проверить непосредственно, если заметить, что под интегралом в выражении для a_{11} стоит величина $\dfrac{1}{\Delta}\dfrac{dF}{d\theta}(\bar z_0+\Pi_0 z+\theta\Delta,\bar y_0+\delta,t)$ и применить аналогичные соображения к остальным коэффициентам a_{ik}.

Из первого уравнения (7.61) выразим Δ через δ (будем в дальнейшем употреблять обозначение $\Delta(t)$, $\delta(t)$, опуская зависимость от μ):

$$\Delta(t)=\int\limits_0^t\frac{e^{\frac{1}{\mu}\int\limits_\xi^t a_{11}\,dt}}{\mu}\big(a_{12}\delta(\xi)+R_1\big)\,d\xi. \tag{7.62}$$

Подставим результат во второе уравнение:

$$\frac{d\delta}{dt}=a_{22}\delta+a_{21}\int\limits_0^t\frac{e^{\frac{1}{\mu}\int\limits_\xi^t a_{11}\,dt}}{\mu}\big(a_{12}\delta(\xi)+R_1\big)\,d\xi+R_2.$$

Отсюда получим

$$\delta(t)=\int\limits_0^t e^{\int\limits_\xi^t a_{22}\,dt}R_2\,d\xi+\int\limits_0^t e^{\int\limits_\xi^t a_{22}\,dt}a_{21}\,d\xi\int\limits_0^\xi\frac{e^{\frac{1}{\mu}\int\limits_\eta^\xi a_{11}\,dt}}{\mu}\big(a_{12}\delta(\eta)+R_1\big)\,d\eta.$$

Меняя порядок интегрирования во втором слагаемом, приведем это уравнение к следующему виду:

$$\delta(t)=\int\limits_0^t\mathcal{K}(t,\eta,\mu)\delta(\eta)\,d\eta+R, \tag{7.63}$$

где $\mathcal{K}(t,\eta,\mu)=a_{12}q(t,\eta,\mu)$,

$$q(t,\eta,\mu)=\int\limits_\eta^t a_{21}e^{\int\limits_\xi^t a_{22}dt}\frac{e^{\frac{1}{\mu}\int\limits_\eta^\xi a_{11}dt}}{\mu}d\xi, \tag{7.64}$$

$$R=\int\limits_0^t e^{\int\limits_\xi^t a_{22}dt}R_2d\xi+\int\limits_0^t R_1q\,d\eta. \tag{7.65}$$

Следует заметить, что в уравнении (7.63) величины $\mathcal{K}(t,\eta,\mu)$ на самом деле зависят от Δ и δ, поскольку a_{ik} зависят от Δ и δ, но входящие в a_{ik} величины Δ и δ мы рассматриваем как известные функции t.

Оценим теперь величины q и R, пользуясь уже доказанным в начале данного пункта равномерным стремлением к нулю Δ и δ. Сначала оценим q. В силу равномерного стремления Δ и δ к нулю при $\mu \to 0$ получим $a_{11} = F_z(\bar{z}_0 + \Pi_0 z, \bar{y}_0, t) + \gamma(t,\mu)$, где $\gamma(t,\mu) \Rightarrow 0$ при $\mu \to 0$. Пользуясь теперь соображениями, аналогичными применявшимся при оценке $\Pi_0 z$ в доказательстве леммы 7.1, нетрудно получить

$$e^{\frac{1}{\mu}\int\limits_{\eta}^{\xi} a_{11}\,dt} < Ce^{-\frac{\varkappa_1}{\mu}(\xi-\eta)}. \tag{7.66}$$

Действительно, согласно 3° имеем $F_z(\bar{z}_0(t), \bar{y}_0(t), t) < 0$. Поэтому, как и в доказательстве леммы 7.1, в силу малости $\Pi_0 z$ при $t \geqslant \tau_0\mu$, где τ_0 достаточно велико, а $\mu \to 0$, и равномерной малости $\gamma(t,\mu)$ при $\mu \to 0$, имеем $a_{11} < -\varkappa_1 < 0$. Дальнейшее является повторением рассуждений леммы 7.1.

Итак, имеет место (7.66). Далее, очевидно, первый экспоненциальный сомножитель в выражении, стоящем под знаком интеграла в q, ограничен по модулю не зависящей от μ константой C, и поэтому

$$|q| < \int\limits_{\eta}^{t} C\frac{e^{-\frac{\varkappa_1}{\mu}(\xi-\eta)}}{\mu}\,d\xi < C. \tag{7.67}$$

Оценим теперь R. В силу леммы 7.2 имеем

$$|R| < \int\limits_{0}^{t} Ce^{-\varkappa\xi/\mu}d\xi + \int\limits_{0}^{t} C\mu\,d\eta < C\mu, \tag{7.68}$$

другими словами, $R = \mathcal{O}(\mu)$.

Обратимся теперь к уравнению (7.63). Пользуясь оценками (7.67) и (7.68), получим неравенство

$$|\delta| < C\int\limits_{0}^{t} |\delta|\,d\eta + C\mu. \tag{7.69}$$

Введем $u = \int\limits_{0}^{t} |\delta|\,d\eta$. Тогда $\frac{du}{dt} = |\delta|$, $\left|\frac{du}{dt}\right| = |\delta|$ и (7.69) дает

$$\left|\frac{du}{dt}\right| < C|u| + C\mu. \tag{7.70}$$

Пользуясь леммой 2.1 о дифференциальных неравенствах, получим отсюда

$$|u| < \mu(e^{Ct}-1) \leqslant \mu(e^{CT}-1) < C\mu. \tag{7.71}$$

Следовательно, в силу (7.70) $\left|\frac{du}{dt}\right| < C\mu$, т.е.

$$|\delta| < C\mu. \tag{7.72}$$

Пользуясь теперь (7.62), оценкой (7.72), неравенством $|R_1| < C\mu$ и оценкой (7.66), получим

$$|\Delta| < \int\limits_0^t \frac{e^{-\frac{\varkappa_1}{\mu}(t-\xi)}}{\mu} C\mu\, d\xi < C\mu. \tag{7.73}$$

Оценки (7.72) и (7.73) и составляют утверждение теоремы 7.5, которая, таким образом, доказана.

3. Построение асимптотики фундаментальной системы решений для линейного уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной. В ряде задач теории колебаний, квантовой механики и др. встречается сингулярно возмущенное уравнение вида

$$\mu^2 y'' + Q^2(x)y = 0, \tag{7.74}$$

не удовлетворяющее требованиям предыдущего пункта. К типу (7.74) принадлежит, в частности, уравнение движения маятника (7.11) при отсутствии трения, т.е. в случае $\alpha = 0$. Чтобы уравнение (7.11) свелось к системе типа (7.14), для которой выполнено условие устойчивости (7.18), лежащее в основе всей теории п. 1, нужно, чтобы α было отличным от нуля. Если же $\alpha = 0$, то теория п. 1 неприменима. Как известно, в этом случае решение уравнения (7.11) носит колебательный характер (вследствие малости μ колебания будут иметь очень большую частоту), т.е. явление качественно отличается от рассмотренного в п. 1.

Пользуясь линейностью уравнения (7.74), мы не будем связывать построение асимптотики с заданием дополнительных условий, как это было сделано в предыдущем пункте, где рассматривалась начальная задача, а поставим целью построить асимптотику фундаментальной системы решений, что даст возможность получать асимптотику решений, определяемых самыми разнообразными дополнительными условиями.

Будем предполагать, что $Q(x) \neq 0$ на сегменте $a \leqslant x \leqslant b$ и является трижды непрерывно дифференцируемой функцией (для определенности будем считать $Q(x) > 0$).

Перейдем в уравнении (7.74) к новой неизвестной функции u, положив

$$y = uv, \quad \text{где} \quad v = \exp\left[\frac{i}{\mu}\int\limits_a^x Q(x)\,dx\right]. \tag{7.75}$$

Заметим, что v в случае $Q = \mathrm{const}$ переходит в $\exp\left[\frac{i}{\mu}Q(x-a)\right]$ и выражение $y = uv$, где $u = \mathrm{const}$, является просто точным решением.

Произведя в (7.74) указанную замену, получим уравнение

$$\mu u'' + 2iu'Q + iuQ' = 0,$$

которое запишем в виде системы

$$\mu z' = -2izQ - iuQ', \quad u' = z. \tag{7.76}$$

Положив здесь формально $\mu = 0$, получим $2zQ = -uQ'$, $u' = z$, откуда

$$u' = -\frac{1}{2}\frac{Q'}{Q}u.$$

Возьмем частное решение этого уравнения, имеющее вид

$$\bar{u}(x) = \frac{1}{\sqrt{Q(x)}}. \tag{7.77}$$

Оказывается, если $\bar{u}(x)$ подставить в (7.75) вместо u, то получится приближенное (в асимптотическом смысле) представление для некоторого решения уравнения (7.74), которое назовем $y_1(x)$. Обозначим через $y_2(x)$ решение, комплексно сопряженное $y_1(x)$: $y_2 = y_1^*$.

Теорема 7.6. *Пусть функция $Q(x) > 0$ и трижды непрерывно дифференцируема на $[a, b]$. Тогда на $[a, b]$ существует фундаментальная система решений уравнения (7.74) вида*

$$\begin{aligned} y_1 &= \left[\frac{1}{\sqrt{Q(x)}} + \varepsilon_1(x,\mu)\right] \exp\left[\frac{i}{\mu}\int_a^x Q(x)\,dx\right], \\ y_2 &= \left[\frac{1}{\sqrt{Q(x)}} + \varepsilon_2(x,\mu)\right] \exp\left[-\frac{i}{\mu}\int_a^x Q(x)\,dx\right], \end{aligned} \tag{7.78}$$

причем $\varepsilon_1(x,\mu) = \mathcal{O}(\mu)$, $\varepsilon_2(x,\mu) = \mathcal{O}(\mu)$.

Доказательство. Положим $u - \bar{u} = \delta$, $z - \bar{z} = \Delta$, где $\bar{u}$ определено формулой (7.77), а $\bar{z} = \bar{u}'$. Для Δ и δ получим систему

$$\mu\Delta' = -2iQ\Delta - iQ'\delta - \mu\bar{z}', \quad \delta' = \Delta, \tag{7.79}$$

и определим эти функции начальными условиями

$$\delta(a) = 0, \qquad \Delta(a) = 0 \tag{7.80}$$

(тем самым мы фактически задаем начальные условия для u и z).

Разобьем доказательство на два этапа.

1) Докажем сначала, что

$$\delta = \mathcal{O}(\mu), \quad \Delta = \mathcal{O}(\mu). \tag{7.81}$$

Выполнение соотношений (7.81) означает, что существует решение системы (7.76), имеющее вид $u = \bar{u} + \mathcal{O}(\mu)$, $z = \bar{z} + \mathcal{O}(\mu)$, и, следовательно, существует решение y_1 уравнения (7.74), представимое первой формулой (7.78). Что касается второго решения y_2, то, так как $y_2 = y_1^*$, представление для y_2 отдельного доказательства не требует. При этом $\varepsilon_2(x,\mu) = \varepsilon_1^*(x,\mu)$.

Для доказательства (7.81) перейдем от (7.79), (7.80) к эквивалентной системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= \int\limits_a^x \frac{-iQ'(\tau)\delta(\tau) - \mu\bar{z}'(\tau)}{\mu} e^{-\frac{2i}{\mu}\int\limits_\tau^x Q\,dx}\,d\tau, \\ \delta(x) &= \int\limits_a^x \Delta(\xi)\,d\xi, \end{aligned} \tag{7.82}$$

откуда перейдем к уравнению, содержащему только $\Delta(x)$:

$$\Delta(x) = \int\limits_a^x \frac{-iQ'(\tau)}{\mu}\left(\int\limits_a^\tau \Delta(\xi)\,d\xi\right) e^{-\frac{2i}{\mu}\int\limits_\tau^x Q\,dx}\,d\tau - \\ - \int\limits_a^x \bar{z}'(\tau) e^{-\frac{2i}{\mu}\int\limits_\tau^x Q\,dx}\,d\tau = (1) + (2). \tag{7.83}$$

Интегрируя по частям второе слагаемое этого выражения, получим

$$(2) = -\mu e^{-\frac{2i}{\mu}\int\limits_\tau^x Q\,dx} \frac{\bar{z}'(\tau)}{2iQ}\Bigg|_a^x + \mu\int\limits_a^x e^{-\frac{2i}{\mu}\int\limits_\tau^x Q\,dx}\left(\frac{\bar{z}'}{2iQ}\right)' d\tau = \alpha(x,\mu)\mu.$$

Преобразуем теперь (1) таким же интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} (1) = &\left(-\frac{Q'(\tau)}{2Q(\tau)}\int\limits_a^\tau \Delta(\xi)\,d\xi\right) e^{-\frac{2i}{\mu}\int\limits_\tau^x Q\,dx}\Bigg|_a^x + \\ &+ \int\limits_a^x \left(\frac{Q'(\tau)}{2Q(\tau)}\int\limits_a^\tau \Delta(\xi)\,d\xi\right)' e^{-\frac{2i}{\mu}\int\limits_\tau^x Q\,dx} d\tau = \\ = &-\frac{Q'(x)}{2Q(x)}\int\limits_a^x \Delta(\tau)\,d\tau + \\ &+ \int\limits_a^x \left[\left(\frac{Q'(\tau)}{2Q(\tau)}\right)'\int\limits_a^\tau \Delta(\xi)\,d\xi + \frac{Q'(\tau)}{2Q(\tau)}\Delta(\tau)\right] e^{-\frac{2i}{\mu}\int\limits_\tau^x Q\,dx} d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (7.83) принимает вид

$$\Delta(x) = \int_a^x \beta(x,\tau,\mu)\,d\tau \int_a^\tau \Delta(\xi)\,d\xi + \int_a^x \gamma(x,\tau,\mu)\Delta(\tau)\,d\tau + \alpha(x,\mu)\mu,$$

при этом $|\alpha(x,\mu)| < \bar{\alpha}$, $|\beta(x,\tau,\mu)| < \bar{\beta}$, $|\gamma(x,\tau,\mu)| < \bar{\gamma}$, где $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$ — некоторые, не зависящие от μ постоянные. Меняя в первом слагаемом порядок интегрирования, получим

$$\int_a^x \Delta(\xi)\,d\xi \int_\xi^x \beta(x,\tau,\mu)\,d\tau = \int_a^x \widetilde{\beta}(x,\xi,\mu)\Delta(\xi)\,d\xi,$$

где $\widetilde{\beta}(x,\xi,\mu) < \bar{\delta}$, $\bar{\delta}$ — не зависящая от μ постоянная. Тем самым уравнение (7.83) преобразуется к окончательному виду

$$\Delta(x) = \int_a^x K(x,\tau,\mu)\Delta(\tau)\,d\tau + \alpha(t,\mu)\mu, \tag{7.84}$$

где $K(x,\tau,\mu)=\widetilde{\beta}(x,\tau,\mu)+\gamma(x,\tau,\mu)$, и, следовательно, $|K(x,\tau,\mu)|<\overline{K}$ (постоянная $\overline{K}$ не зависит от μ).

Перейдем от уравнения (7.84) к неравенству

$$|\Delta(x)| < \int_a^x \overline{K}|\Delta(\tau)|\,d\tau + \bar{\alpha}\mu. \tag{7.85}$$

Введем новую функцию $w(x) = \int_a^x |\Delta(\tau)|\,d\tau$ (аналогичные построения были проделаны при доказательстве теоремы 7.5). Тогда $\frac{dw}{dx} = |\Delta|$, $\left|\frac{dw}{dx}\right| = |\Delta|$ и из (7.85) следует

$$\left|\frac{dw}{dx}\right| < \overline{K}|w| + \bar{\alpha}\mu.$$

Пользуясь леммой 2.1 о дифференциальных неравенствах, получим отсюда

$$|w| < \frac{\bar{\alpha}\mu}{\overline{K}}\left(e^{\overline{K}(b-a)} - 1\right) \leqslant \frac{\bar{\alpha}\mu}{\overline{K}}\left(e^{\overline{K}(b-a)} - 1\right) < C\mu.$$

Следовательно, $|\Delta(x)| = \left|\frac{dw}{dx}\right| < \overline{K}C\mu + \bar{\alpha}\mu < \overline{D}\mu$, что и требуется. Аналогичная оценка для $\delta(x)$ получается из второго уравнения (7.82). Таким образом, оценки (7.81) доказаны.

2) Убедимся теперь, что решения y_1 и $y_2 = y_1^*$ линейно независимы, доказав, что определитель Вронского $D(y_1,y_2)$ отличен от нуля. Имеем

$$D(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_1^* \\ y_1' & y_1^{*\prime} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} uv & u^*v^* \\ uv' + zv & u^*v^{*\prime} + z^*v^* \end{vmatrix}.$$

Учитывая, что $v' = \frac{i}{\mu}Qv$, получим далее

$$D(y_1, y_2) = vv^* \begin{vmatrix} u & u^* \\ u\frac{i}{\mu}Q + z & -u^*\frac{i}{\mu}Q + z^* \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{iQ}{\mu} \begin{vmatrix} u & u^* \\ u + \mathcal{O}(\mu) & -u^* + \mathcal{O}(\mu) \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{2iQ}{\mu}[uu^* + \mathcal{O}(\mu)] = -\frac{2iQ}{\mu}[\bar{u}^2 + \mathcal{O}(\mu)],$$

откуда уже ясно, что эта величина отлична от нуля.

Таким образом, y_1 и $y_2 = y_1^*$ действительно образуют фундаментальную систему решений, и теорема 7.6 доказана.

Замечания.

1. Можно доказать, что аналогичный результат имеет место и для уравнения $\mu^2 y'' - Q^2(x)y = 0$ с той разницей, что в (7.78) следует i заменить единицей.

2. Полученные асимптотические формулы (7.78) теряют смысл, если на $[a, b]$ имеются точки, где $Q(x)$ обращаются в нуль. Такие точки называются точками поворота. Термин происходит из квантовой механики, где некоторые задачи для уравнения Шрёдингера в одномерном случае приводятся к уравнению типа (7.74). При наличии точек поворота асимптотика строится более сложным образом и соответствующая теория выходит за рамки настоящего учебника. Метод построения асимптотики решений уравнений типа (7.74) в физике часто называется ВБК-методом по имени ученых — физиков Венцеля, Бриллюэна и Крамерса, разработавших соответствующий алгоритм.

3. Метод нами продемонстрирован на примере (7.74). Следует, однако, заметить, что этот метод распространяется на сингулярно возмущенные системы более общего вида (см., например, [20], где приведен подробный анализ основных идей метода, его дальнейшее развитие и связь с вопросом так называемой регуляризации сингулярно возмущенных задач).

4. Метод усреднения. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dt} = \mu Y(y, t), \quad y(0, \mu) = y^0. \tag{7.86}$$

Из предыдущего известно, что при условии достаточной гладкости правой части (7.86) на некотором сегменте $[0, T]$ решение задачи (7.86) представимо асимптотически многочленом по степеням μ (теорема 7.2). Однако при решении ряда вопросов математической физики приходится исследовать решение на произвольно большом промежутке изменения t, например, для $t \sim 1/\mu$. В этом случае описанные в § 1 методы неприменимы.

Этот случай естественно отнести к классу нерегулярно возмущенных. Обратим внимание на то, что замена переменных $\xi = t\mu$ приводит к конечному промежутку изменения ξ, но уравнение принимает вид

$$\frac{dy}{d\xi} = Y(y, \xi/\mu).$$

В этой форме нерегулярность возмущения становится особенно хорошо заметной.

В настоящем пункте мы опишем асимптотический метод для нерегулярно возмущенных систем, так называемый *метод усреднения*, основы которого заложены Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым [19]. Этот метод, как будет видно ниже, особенно удобен для описания нелинейных колебательных процессов.

Сформулируем правило построения асимптотики, которое дает метод усреднения. Введем функции

$$\overline{Y}(\eta) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T Y(\eta, t)\, dt, \tag{7.87}$$

являющиеся *средними значениями* правой части по явно входящему переменному t. Переменное η при этой операции считается фиксированным.

Замечание. В случае ограниченных периодических по t функций (с периодом 2π для определенности)

$$\overline{Y}(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Y(\eta, t)\, dt.$$

Действительно, $T = 2k\pi + \tau$ $(0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi)$ и

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T Y(\eta, t)\, dt = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k\pi(1 + \frac{\tau}{2k\pi})} \int_0^{2k\pi+\tau} Y(\eta, t)\, dt = \\ = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k\pi} \int_0^{2k\pi} Y(\eta, t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Y(\eta, t)\, dt.$$

Предположим, что кроме предельных соотношений (7.87) справедливы также соотношения

$$\frac{d\overline{Y}}{d\eta} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial Y}{\partial \eta}(\eta, t)\, dt, \tag{7.88}$$

т. е. среднее значение производной $\dfrac{\partial Y}{\partial \eta}$ равно производной от среднего значения $\overline{Y}$.

Поставим в соответствие уравнению (7.86) следующее, так называемое усредненное уравнение, которое в принципе проще (7.86):

$$\frac{d\eta}{dt} = \mu \overline{Y}(\eta), \quad \eta(0) = y^0. \tag{7.89}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 7.7. *Пусть*

1°. *В некоторой области* $|y| \leqslant b$, $0 \leqslant t < \infty$, *функция* $Y(y,t)$ *непрерывна и равномерно ограничена вместе с производной первого порядка по* y.

2°. *При* $|y| \leqslant b$ *существует среднее значение* (7.87), *а также справедливо* (7.88), *причем предельный переход в* (7.87) *и* (7.88) *имеет место равномерно относительно* $\eta \in [-b, b]$.

3°. *Решения* y *и* η *задач* (7.86) *и* (7.89) *существуют и принадлежат* $(-b, b)$ *при* $0 \leqslant t \leqslant L/\mu$, *где* L — *не зависящая от* μ *постоянная.*

Тогда равномерно относительно $t \in [0, L/\mu]$ *имеет место предельный переход*

$$\lim_{\mu\to 0}(y - \eta) = 0. \tag{7.90}$$

Доказательство. Рассмотрим величину

$$u(\eta, t) = \int_0^t [Y(\eta, t) - \overline{Y}(\eta)]\, dt, \tag{7.91}$$

а также ее производную по η

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \int_0^t \left[\frac{\partial Y}{\partial \eta}(\eta, t) - \frac{d\overline{Y}}{d\eta}\right] dt, \tag{7.92}$$

и докажем, что в области $|\eta| \leqslant b$, $0 \leqslant t \leqslant L/\mu$ справедливы соотношения

$$\mu u = \varepsilon(\mu), \quad \mu\frac{\partial u}{\partial \eta} = \varepsilon(\mu). \tag{7.93}$$

Здесь и в дальнейшем условимся через $\varepsilon(\mu)$ обозначать любую величину, бесконечно малую вместе с μ равномерно относительно других переменных, например η и t, от которых эта величина зависит. Иными словами, (7.93) означает равномерное относительно η и t стремление μu и $\mu\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$ к нулю.

Докажем первое из соотношений (7.93). Второе доказывается аналогично. Имеем

$$\mu u(\eta, t) = \mu t \cdot \frac{1}{t}\int_0^t \left[Y(\eta, t) - \overline{Y}(\eta)\right] dt = \mu t V(\eta, t).$$

Пусть $0 \leqslant t \leqslant 1/\sqrt{\mu}$. Тогда $\mu t \leqslant \sqrt{\mu}$, и $V(\eta, t)$ равномерно ограничено относительно $\eta \in [-b, b]$ в силу равномерности предельного перехода (7.87), т. е. $\mu u(\eta, t) = \mathcal{O}(\sqrt{\mu})$. Если же $1/\sqrt{\mu} \leqslant t \leqslant L/\mu$, то $\mu t \leqslant L$, а в силу (7.87) для любого $\delta > 0$ существует $\mu_0(\delta)$ такое, что при $\mu < \mu_0(\delta)$ выполнено $|V(\eta, t)| < \delta/L$, т. е. $|\mu u| < \delta$ для всех $|\eta| \leqslant b$. Поэтому $\mu u(\eta, t) = \varepsilon(\mu)$ для $0 \leqslant t \leqslant L/\mu$, что и требовалось.

Введем теперь в рассмотрение функцию

$$\bar{y}(t, \mu) = \eta(t) + \mu u(\eta(t), t). \tag{7.94}$$

Эта функция удовлетворяет уравнению

$$\bar{y}' = \mu Y(\bar{y}, t) + R, \quad \bar{y}(0, \mu) = y^0,$$

где $R = (\eta + \mu u)' - \mu Y(\eta + \mu u, t) = \mu \overline{Y}(\eta) + \mu \frac{du}{dt} - \mu Y(\eta + \mu u,\ t)$. Учитывая, что

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \mu \overline{Y}(\eta) + \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = Y(\eta, t) - \overline{Y}(\eta)$$

$$Y(\eta + \mu u, t) = Y(\eta, t) + \mu u \frac{\partial Y}{\partial y}(\eta^*, t),$$

получим

$$R = \mu^2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \overline{Y}(\eta) - \mu^2 u \frac{\partial Y}{\partial y}(\eta^*, t) = \mu \varepsilon(\mu) = o(\mu).$$

Нетрудно убедиться, что $\Delta = y - \bar{y} \Rightarrow 0$ при $\mu \to 0$ равномерно относительно $t \in [0, L/\mu]$. В самом деле, величина Δ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\Delta}{dt} = \mu \frac{\partial Y}{\partial y}(\bar{y} + \theta\Delta, t)\Delta + R. \tag{7.95}$$

При этом $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, $R = o(\mu)$, $\Delta(0, \mu) = 0$. В силу условия 3° теоремы $|\bar{y} + \theta\Delta| < b$ при $0 \leqslant t \leqslant L/\mu$. Поэтому существует не зависящая от μ постоянная N такая, что $\left|\frac{\partial Y}{\partial y}(\bar{y} + \theta\Delta, t)\right| < N$, и из (7.95) получим

$$|\Delta| = \left| \int_0^t e^{\mu \int_\xi^t \frac{\partial Y}{\partial y}(\bar{y} + \theta\Delta, t)\, dt} R\, d\xi \right| < o(\mu) \frac{L}{\mu} e^{NL},$$

откуда и следует равномерное относительно $t \in [0, L/\mu]$ стремление Δ к нулю при $\mu \to 0$.

Пользуясь этим результатом, соотношением (7.94) и оценкой (7.93), получим (7.90), и теорема 7.7 тем самым доказана.

Замечания.

1. Утверждение теоремы 7.7 остается справедливым для случая, когда в (7.86) величина y является вектор-функцией. В условиях теоремы вместо $\frac{\partial Y}{\partial y}$ естественным образом появятся производные $\frac{\partial Y_i}{\partial y_k}$. В доказательстве встретятся небольшие технические осложнения при оценке Δ, которые можно преодолеть, пользуясь соображениями § 4 гл. 2.

2. Теорема 7.7 была сформулирована и доказана при упрощающем предположении, что не только решение $\eta(t,\mu)$ более простой, чем исходная, усредненной системы лежит в $(-b,b)$, но и решение $y(t,\mu)$ исходной системы также лежит в $(-b,b)$. От этого последнего требования можно избавиться, наложив дополнительное требование на $\eta(t,\mu)$: $\eta \in [-b+\delta, b-\delta]$ при $0 \leqslant t \leqslant L/\mu$. Отсюда неравенство $|y(t,\mu)| < b$ можно получить как следствие. В самом деле, пусть при некотором $T \leqslant L/\mu$ имеем $|y(T,\mu)| = b$, т.е. интегральная кривая выходит на границу области. Возьмем $T^* < T$, достаточно близкое к T, чтобы $y(T^*,\mu)$ отличалось от $y(T,\mu)$ не более чем на $\delta/4$. Поскольку $|y(t,\mu)| < b$ при $0 \leqslant t \leqslant T^*$, то при $0 \leqslant t \leqslant T^*$ справедлива теорема 7.7 и при достаточно малых μ величина $\eta(T^*,\mu)$ отличается от $y(T^*,\mu)$ не более чем на $\delta/4$. А тогда $\eta(T^*,\mu)$ отличается от $y(T,\mu)$, равного b или $-b$, не более чем на $\delta/2$, что противоречит тому, что

$$\eta \in [-b+\delta, b-\delta].$$

Противоречие приводит к выводу, что $|y(t,\mu)| < b$ для $0 \leqslant t \leqslant L/\mu$, а тогда, как было доказано, (7.90) справедливо на всем $[0, L/\mu]$.

Можно было бы не предполагать также и существования решения $y(t,\mu)$, а доказать его существование в окрестности $\eta(t)$ подобно тому, как это было сделано, например, в теореме 7.2.

3. Мы привели здесь простейшую теорему метода усреднения. Существует обширная литература, посвященная методу усреднения, в которой приводятся доказательства различных более тонких и сложных теорем и строятся приближения, дающие любую асимптотическую точность (подробнее с этим кругом вопросов можно ознакомиться, например, по книгам [10, 13, 22]).

Пример 7.2. Рассмотрим уравнение ван дер Поля

$$x'' - \mu(1-x^2)x' + x = 0, \tag{7.96}$$

описывающее ламповый генератор на триоде с колебательным контуром в анодной цепи (см., например, [23]. В книге дается вывод уравнения ван дер Поля). Что касается асимптотики, то авторы интересуются случаем, когда μ не мало, а, напротив, велико. Поделив на этот большой параметр, получим уравнение, в котором малый множитель стоит при x''. Такое уравнение тоже принадлежит к типу сингулярно возмущенных, но описывает колебания, не близкие к гармоническим, как в случае (7.96), а колебания иного типа — так называемые *релаксационные колебания*. Монография Е. Ф. Мищенко и Н. Х. Розова посвящена асимптотической теории релаксационных колебаний для систем общего вида, развитой Л. С. Понтрягиным и авторами монографии.

Перепишем (7.96) в виде системы

$$x' = u, \quad u' = \mu(1 - x^2)u - x$$

и зададим начальные условия $x(0,\mu) = x^0$, $u(0,\mu) = 0$.

Введем новые переменные y_1 и y_2, положив

$$x = y_1\cos(t + y_2), \quad u = -y_1\sin(t + y_2).$$

В переменных y_1, y_2 получим систему

$$y_1' = \mu\left[\frac{y_1}{2}\left(1 - \frac{y_1^2}{4}\right) - \frac{y_1}{2}\cos 2(t + y_2) + \frac{y_1^3}{8}\cos 4(t + y_2)\right],$$
$$y_2' = \mu\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{y_1^2}{2}\right)\sin 2(t + y_2) - \frac{y_1^2}{8}\sin 4(t + y_2)\right]$$

при условиях $y_1(0,\mu) = x^0$, $y_2(0,\mu) = 0$, являющуюся системой типа (7.86).

Усредненная система (7.89) имеет вид

$$\eta_1' = \mu\frac{\eta_1}{2}\left(1 - \frac{\eta_1^2}{4}\right), \quad \eta_2' = 0; \quad \eta_1(0) = x^0, \quad \eta_2(0) = 0.$$

Отсюда $\eta_2(t) \equiv 0$. Уравнение для η_1 отделяется. Если построить плоскость t, η_1, то, как и на рис. 20 (данный случай отличается только масштабом по оси t), нетрудно проследить, что если $x^0 > 0$, то существует решение $\eta_1(t)$, приближающееся при $t \to \infty$ к $\eta_1 = 2$. Эти решения можно записать в виде квадратур. Приближенное решение уравнения (7.96), получающееся по методу усреднения, имеет, таким образом, вид

$$x = [\eta_1(t,\mu) + \varepsilon(\mu)]\cos(t + \varepsilon(\mu)). \tag{7.97}$$

Уравнение для η_1 имеет два стационарных решения: $\eta_1 = \pm 2$. Им отвечают решения уравнения (7.96) вида $x = [\pm 2 + \varepsilon(\mu)]\cos(t + \varepsilon(\mu))$.

Заметим, что разложением по параметру μ в степенной ряд (7.6) представление (7.97) не получится.

ГЛАВА 8

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Уравнения в частных производных первого порядка традиционно рассматриваются в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений по той причине, что построение их общего решения может быть проведено методами, развитыми в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка имеет вид

$$F\Big(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big) = 0, \tag{8.1}$$

где F — некоторая заданная функция своих аргументов, а неизвестной функцией является u, зависящая от аргументов $x_1, \ldots, x_n$.

Мы остановимся на двух частных случаях (8.1). Это так называемое *линейное уравнение*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \tag{8.2}$$

и *квазилинейное уравнение*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = a(x_1, \ldots, x_n, u), \tag{8.3}$$

где a_i, a — заданные функции своих аргументов.

§ 1. Линейное уравнение

Обратимся к изучению уравнения (8.2):

$$a_1(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \cdots + a_n(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \tag{8.4}$$

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ изменяются в некоторой области G и пусть в этой области функции $a_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$ обладают непрерывными частными производными и не обращаются одновременно в нуль, что можно выразить в виде условия

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2(x_1, \ldots, x_n) \neq 0.$$

Решением уравнения (8.4) будем называть любую функцию, обладающую частными производными по аргументам $x_1, \ldots, x_n$, которая обращает (8.4) в тождество. Геометрически решение можно интерпретировать как поверхность в пространстве $x_1, \ldots, x_n, u$. Будем называть эту поверхность *интегральной поверхностью.*

1. Двумерный случай. Рассмотрим сначала случай $n = 2$ и на нем поясним основные идеи построения решения:*)

$$A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{8.5}$$

Выражение слева можно интерпретировать как скалярное произведение векторного поля $\{A, B\}$ на $\operatorname{grad} u = \left\{\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}\right\}$ и, таким образом, (8.5) означает, что производная от u по направлению вектора $\{A, B\}$ равна нулю. Обозначим через Γ кривую на плоскости (x, y), которая обладает тем свойством, что касательный вектор к этой кривой коллинеарен $\{A, B\}$. Ее параметрическое представление (параметром является t) можно получить из системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = B(x,y). \tag{8.6}$$

Фазовые траектории системы (8.6) на плоскости (x, y), которые являются интегральными кривыми уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B(x,y)}{A(x,y)} \quad \left(\text{или уравнения } \frac{dx}{dy} = \frac{A(x,y)}{B(x,y)}\right), \tag{8.7}$$

называются *характеристиками уравнения в частных производных* (8.5). Вместо пары уравнений (8.7) часто записывается одно уравнение в симметричной относительно x и y форме

$$\frac{dx}{A(x,y)} = \frac{dy}{B(x,y)}. \tag{8.8}$$

В силу условий, наложенных на A и B ($A^2 + B^2 \neq 0$), через каждую точку G проходит одна и только одна характеристика (см. гл. 2, § 2, замечание 5).

Пусть $u = u(x, y)$ — поверхность уравнения (8.5). Будем рассматривать ее над характеристикой, при этом u будет сложной функцией t: $u = u(x(t), y(t))$. Нетрудно видеть, что полная производная от u по t в силу (8.6) совпадает с левой частью (8.5):

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} = A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{8.9}$$

*)Доказательство, посвященное многомерному случаю, будет содержаться в п. 2.

Следовательно, в силу уравнения (8.5) $\frac{du}{dt} = 0$, апликата u интегральной поверхности сохраняет над характеристикой постоянное значение, т. е. характеристика является линией уровня интегральной поверхности.

Рассмотрим некоторую кривую γ, не совпадающую с характеристикой (рис. 21). Через каждую точку $M(x, y)$ области G проведем характеристику. Точка ее пересечения с кривой γ однозначно определяет эту характеристику, т. е. характеристики образуют однопараметрическое семейство. В качестве параметра можно взять, например, расстояние θ по кривой γ от некоторой фиксированной точки (x_0, y_0). Положение точки M на каждой характеристике определяется параметром t. Как видно из (8.6), t можно задать с точностью до произвольного слагаемого, поэтому будем считать, что точка пересечения каждой характеристики с кривой γ соответствует значению $t = t_0$.

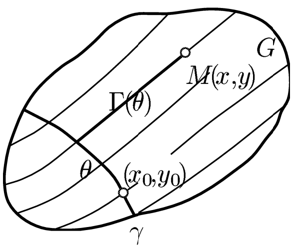

Рис. 21

Таким образом, в области G каждой точке $M(x, y)$ можно поставить в соответствие пару чисел (θ, t): θ определяет характеристику, проходящую через M, а t — значение параметра на характеристике, отвечающее точке M. Тем самым мы имеем взаимно однозначное соответствие $(x, y) \Leftrightarrow (\theta, t)$ или, аналитически,

$$\begin{aligned} x &= X(\theta, t), \quad y = Y(\theta, t), \\ \theta &= \Theta(x, y), \quad t = T(x, y). \end{aligned} \tag{8.10}$$

В переменных (θ, t) уравнение характеристики имеет вид $\frac{d\theta}{dt} = 0$, откуда $\theta = C$. Таким образом, вдоль характеристики

$$\Theta(x, y) = C. \tag{8.11}$$

Переменные θ, t удобны в том отношении, что, перейдя к этим переменным, мы можем легко получить решение уравнения (8.5). Обозначим

$$u(x, y) = u\big(X(\theta, t), Y(\theta, t)\big) = v(\theta, t).$$

В силу (8.9) уравнение (8.5) в переменных v, θ, t имеет вид $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ (решение сохраняет свое значение вдоль характеристики). Так как $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, то v является функцией только θ, т. е. $v = F(\theta)$, а тем самым

$$u(x, y) = F(\Theta(x, y)), \tag{8.12}$$

где F — произвольная функция своего аргумента.

Мы приходим, таким образом, к выводу: *общее решение уравнения* (8.5) *имеет вид* (8.12), *где F — произвольная функция аргумента* $\Theta(x,y)$, *а* $\Theta(x,y)$ — *левая часть* (8.11).

С другой стороны, если нам каким-то образом удалось найти функцию $\varphi(x,y)$, обладающую тем свойством, что она тождественно обращается в постоянную вдоль каждой интегральной кривой уравнения (8.8), т.е. вдоль каждой характеристики, то в переменных (θ,t) эта функция должна зависеть только от θ, но не от t, т.е. $\varphi(X(\theta,t),Y(\theta,t))=\widetilde{\varphi}(\theta)$. Поскольку в (8.12) F — произвольная функция, выражение для общего решения можно писать не только в виде (8.12), но и в виде

$$u(x,y)=F(\varphi(x,y)). \tag{8.13}$$

Действительно, $F(\varphi)=F(\widetilde{\varphi}(\theta))=\widetilde{F}(\theta)$, и мы приходим опять к (8.12).

Пример 8.1. Пусть в (8.5) коэффициенты являются постоянными: $A=A_0$, $B=B_0$. Из (8.7) находим $y-v_0x=\mathrm{const}$, где $v_0=B_0/A_0$. Тогда согласно (8.13) общее решение имеет вид $u(x,y)=F(y-v_0x)$.

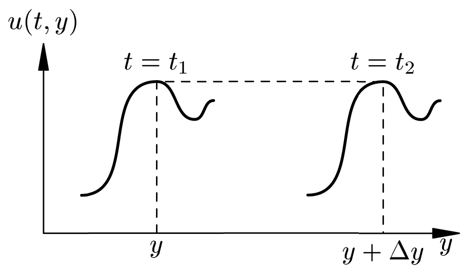

Рис. 22

Функция $F(y-v_0x)$ называется бегущей волной со скоростью v_0 и профилем $F(y)$. Легко понять смысл этого названия, если x интерпретировать как время, заменив x на t. Нарисуем профили волны в моменты t_1 и t_2 (рис. 22). При $v_0>0$ и $t_2>t_1$ второй профиль сдвинут вправо как единое целое на величину $\Delta y=(t_2-t_1)v_0$. Действительно, $y+\Delta y-v_0t_2=y-v_0t_1$, т.е. в точках y и $y+\Delta y$ полный аргумент F один и тот же, а $\Delta y/\Delta t=v_0$, т.е. скорость сдвига есть v_0.

Согласно (8.12) или (8.13) общее решение уравнения в частных производных зависит от произвольной функции, т.е. содержит еще бóльшую степень произвола, чем в случае обыкновенного дифференциального уравнения. Рассмотрим вопрос о том, каким образом из множества (8.12) можно выделить единственное решение.

Пусть на кривой γ_1, уравнение которой $x = x(s)$, $y = y(s)$ и которая не совпадает с характеристикой ни на одном интервале положительной длины, задано дополнительное условие

$$u(x,y)|_{\gamma_1} = \omega(s), \tag{8.14}$$

где $\omega(s)$ — заданная функция переменной s. Это задача называется начальной задачей или задачей Коши для уравнения (8.5).

Так как γ_1 не является характеристикой, то $\Theta(x,y)$ вдоль γ_1 меняется: $\Theta(x,y)|_{\gamma_1} = \xi = \Theta(x(s), y(s))$, т. е. является функцией s. Тем самым $s = \Omega(\xi)$, а $\omega(s) = \omega[\Omega(\xi)]$. Значение u в точке ξ на кривой γ_1 есть $\omega[\Omega(\xi)]$. Если теперь через точку ξ кривой γ_1 провести характеристику, то ее уравнение будет иметь вид $\Theta(x,y) = \xi$, а значение решения в точках этой характеристики равно $\omega[\Omega(\Theta(x,y))]$. А так как через каждую точку G проходит характеристика, то эта формула является выражением для решения в любой точке области G:

$$u(x,y) = \omega[\Omega(\Theta(x,y))]. \tag{8.15}$$

Соответствующая геометрическая картина представлена на рис. 23.

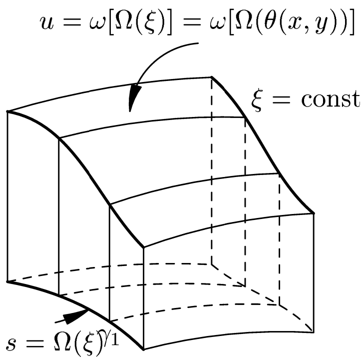

Рис. 23

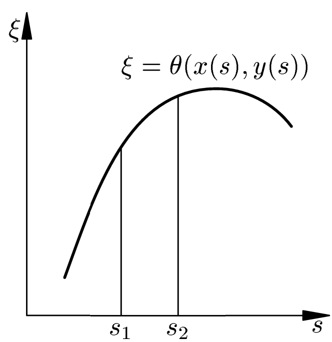

Рис. 24

Нетрудно и непосредственно проверить, что формула (8.15) дает нужное решение: во-первых, это есть решение, так как содержится в (8.12), а во-вторых, $u(x,y)|_{\gamma_1} = \omega[\Omega(\xi)] = \omega(s)$, т. е. удовлетворяется условие (8.14).

Замечания.

1. Вместо $\Theta(x, y)$ во всех этих рассуждениях можно использовать $\varphi(x, y)$ (см. (8.13)).

2. Конечно, следует иметь в виду, что для получения $\Omega(\xi)$ нужно, чтобы ξ вдоль γ_1 зависела от s монотонно, как, например, на участке (s_1, s_2) (рис. 24). Тогда $s = \Omega(\xi)$ определено однозначно.

Пример 8.2. Рассмотрим уравнение из примера 8.1 и в качестве (8.14) возьмем условие

$$u(t, 0) = \mu(t). \tag{8.16}$$

Здесь γ_1 есть прямая $y = 0$, параметром s служит t. В этом случае

$$\varphi(t, y) = y - v_0 t, \quad \varphi(t, y)|_{\gamma_1} = -v_0 t = \xi, \quad t = \Omega(\xi) = -\xi / v_0.$$

Следовательно, искомое решение $u(t, y) = \mu\Big(\frac{\varphi(t, y)}{-v_0}\Big) = \mu\Big(t - \frac{y}{v_0}\Big)$. Таким образом, решение является бегущей волной, профиль которой однозначно определяется заданной функцией $\mu(t)$.

Пусть теперь γ_1 совпадает с какой-либо характеристикой. Здесь могут представиться разные случаи.

а) $u(x, y)|_{\gamma_1} = \text{const} = u_0$. Тогда решение, очевидно, определяется неоднозначно, так как решением этой задачи будет любая функция $u(x, y) = f(\Theta(x, y))$, лишь бы $f(\Theta(x, y)|_{\gamma_1}) = u_0$. Например, можно получить $f(\Theta(x, y)) = F(\Theta(x, y)) - F(\Theta(x, y)|_{\gamma_1}) + u_0$ (напомним, что $F(\Theta(x, y)|_{\gamma_1}) = \text{const}$), где F — уже произвольная функция.

б) $u(x, y)|_{\gamma_1} \neq \text{const}$. В этом случае решение задачи не существует, так как всякое решение уравнения (8.5) постоянно вдоль характеристики и, следовательно, поставленное на γ_1 условие удовлетворено быть не может.

2. Многомерный случай. Рассмотрим теперь общий случай (8.4) в предположениях, сформулированных в начале § 1.

Поставим в соответствие уравнению (8.4) систему (ср. (8.6))

$$\frac{dx_i}{dt} = a_1(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8.17}$$

и систему для фазовых траекторий (ср. (8.8))

$$\frac{dx_1}{a_1} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n}. \tag{8.18}$$

Интегральные кривые системы уравнений (8.18) *называются характеристиками уравнения в частных производных* (8.4). В силу условий, наложенных на коэффициенты a_i, для системы (8.18) имеет место теорема существования и единственности, и через каждую точку n-мерной области G проходит одна и только одна характеристика.

Теорема 8.1. *Вдоль характеристики решение* $u(x_1, ..., x_n)$ *уравнения* (8.4) *сохраняет постоянное значение.*

Доказательство. Действительно (ср. (8.9)),

$$\frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} a_i = 0, \tag{8.19}$$

т. е. $u = \text{const}$.

Идея построения общего решения уравнения (8.4) является естественным обобщением того, что имело место для $n = 2$. Область G покрывается характеристиками, которые образуют семейство, зависящее от $n-1$ параметров $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$. Каждой точке $(x_1, \ldots, x_n)$ области G может быть поставлена в соответствие система значений $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, t$, при этом $\theta_i = \Theta(x_1, \ldots, x_n)$, $t = T(x_1, \ldots, x_n)$. Задание $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$ выделяет характеристику из семейства, а t — параметр, определяющий точку на характеристике. Имеем $u(x_1, \ldots, x_n) = v(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, t)$. В переменных $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, t$ уравнение (8.4) принимает вид $\dfrac{\partial v}{\partial t} = 0$. Таким образом, $v = F(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ и, следовательно (ср. (8.12)),

$$u(x_1, \ldots, x_n) = F(\Theta_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \Theta_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)). \tag{8.20}$$

Для обоснования формулы (8.20) нам потребуется понятие первого интеграла системы уравнений (8.18). При этом будем предполагать, что $a_n(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ в G. Тогда (8.18) можно записать в виде нормальной системы

$$\frac{dx_i}{dx_n} = \frac{a_i}{a_n}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{8.21}$$

а в качестве $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$ можно взять начальные значения $x_1^0, \ldots$ $\ldots, x_{n-1}^0$; x_n будет играть роль t. Семейство решений системы (8.21) имеет вид

$$x_i = X_i(x_n, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n^0), \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{8.22}$$

X_i выражает закон соответствия между парой точек интегральной кривой: начальной и текущей. Их можно поменять ролями, и тогда получим

$$x_i^0 = X_i(x_n^0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n), \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{8.23}$$

где X_i — те же самые функции, что и в (8.22), так как выражают тот же закон соответствия.

Замечание. То, что справа в (8.22) и в (8.23) мы имеем одни и те же функции, удобно продемонстрировать на примере линейной системы с независимым переменным x_n и неизвестной вектор-функцией x с компонентами $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Формула (8.22) имеет вид (см. (3.84))

$$x = W(x_n) \times W^{-1}(x_n^0)x^0 \equiv \mathcal{K}(x_n, x_n^0)x^0.$$

Разрешая относительно x^0, получаем (8.23), т. е.

$$x^0 = W(x_n^0)W^{-1}(x_n)x = \mathcal{K}(x_n^0, x_n)x.$$

Функции $X_i(x_1, \ldots, x_n)$ (x_n^0 в (8.23) фиксировано) можно использовать в качестве Θ_i в построении общего решения (8.20). Заметим еще, что из взаимной обратимости формул (8.22) и (8.23) следует, что $\dfrac{D(X_1, \ldots, X_{n-1})}{D(x_1, \ldots, x_{n-1})} \neq 0$ в G.

Определение. *Первым интегралом системы* (8.18) называется функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, обращающаяся тождественно в постоянную, когда точка $x_1, \ldots, x_n$ пробегает интегральную кривую системы (8.18)*).

Очевидно, функции $X_i(x_1, \ldots, x_n)$ в формулах (8.23) являются первыми интегралами системы (8.21), так как при подстановке (8.22) в правые части (8.23) они обращаются тождественно в x_i^0. Однако первыми интегралами могут быть и другие функции и, что особенно удобно при практическом решении, первые интегралы нередко могут быть получены, например, методом интегрируемых комбинаций (для получения (8.23) надо решать начальную задачу и это менее удобно).

Пример 8.3. $\dfrac{dx_1}{dx_3} = x_2$, $\dfrac{dx_2}{dx_3} = x_1$. Складывая эти уравнения, получим $\dfrac{d}{dx_3}(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)$. Отсюда $x_1 + x_2 = Ce^{x_3}$, и первым интегралом будет

$$\varphi_1 = (x_1 + x_2)e^{-x_3}.$$

Вычитая уравнения, получим $\dfrac{d}{dx_3}(x_1 - x_2) = -(x_1 - x_2)$, откуда найдем другой первый интеграл:

$$\varphi_2 = (x_1 - x_2)e^{x_3}.$$

*)Иногда первым интегралом называют не функцию φ, а соотношение $\varphi = \mathrm{const}$.

Пусть найдены $n-1$ первых интегралов $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots$ $\ldots, n-1)$ системы (8.18) и при этом

$$\frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})}{D(x_1, \ldots, x_{n-1})} \neq 0 \quad \text{в } G, \tag{8.24}$$

т. е. интегралы $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ независимы [16] ((8.23) представляет собой пример системы $n-1$ независимых первых интегралов).

Теорема 8.2. *Всякое решение $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ уравнения* (8.4) *является первым интегралом системы* (8.18), *и, обратно, всякий первый интеграл $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ системы* (8.18) *является решением уравнения* (8.4).

Доказательство. Прямое утверждение фактически было доказано выше (см. теорему 8.1, цепочку тождеств (8.19), где $u = \psi$).

Для доказательства обратного утверждения заменим в (8.19) u на φ и возьмем в качестве исходного тождество $\dfrac{d\varphi}{dt} \equiv 0$, а в качестве конечного получим $\sum_{i=1}^{n} a_i \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} \equiv 0$. Это последнее можно гарантировать лишь по переменному t, т. е. вдоль характеристики. А для того, чтобы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ можно было считать решением уравнения (8.4), нужно, чтобы это тождество было тождеством по переменным $x_1, \ldots, x_n$. Однако поскольку через каждую точку G проходит характеристика, то тождественное равенство нулю вдоль каждой характеристики означает тождественное равенство нулю всюду в G.

Теорема 8.3. *Всякое решение $u = \psi(x_1, \ldots, x_n)$ уравнения* (8.4) *представимо в виде*

$$u = \Psi(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)), \tag{8.25}$$

где $\Psi(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ — некоторая дифференцируемая функция своих аргументов $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, а $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ — первые интегралы системы (8.18), *удовлетворяющие условию* (8.24).

Доказательство. Функция ψ, а также φ_i (по теореме 8.2), являются решениями (8.4), т. е.

$$\begin{gathered}
a_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \cdots + a_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n} = 0, \\
a_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \cdots + a_n \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_1 \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_1} + \cdots + a_n \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n} = 0.
\end{gathered}$$

В каждой точке области G эти соотношения можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно $a_1, \ldots, a_n$. По условию $\sum_{i=1}^n a_i^2 \neq 0$, т.е. имеется нетривиальное решение. Следовательно, определитель этой системы равен нулю всюду в G:

$$\frac{D(\psi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})}{D(x_1, \ldots, x_n)} \equiv 0.$$

Отсюда по теореме анализа [16; гл. 15, теорема 15.4] между $\psi, \varphi_1, \ldots$ $\ldots, \varphi_{n-1}$ имеется функциональная зависимость и в силу условия (8.24) эта зависимость может быть представлена в разрешенном относительно ψ виде $\psi = \Psi(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$, что и требуется.

Замечания.

1. Доказанная теорема дает обоснование приведенной выше формуле (8.20).

2. Формула (8.25) при произвольной дифференцируемой Ψ обладает тем свойством, что в ней согласно теореме 8.3 содержится любое решение уравнения (8.4). С другой стороны, легко проверить непосредственно, что при любой дифференцируемой Ψ функция u из (8.25) удовлетворяет уравнению (8.4); тем самым формула (8.25) представляет общее решение уравнения (8.4).

Поставим теперь дополнительное условие, дающее возможность из множества (8.25) выделить одно решение. Для этого нужно задать в области G многообразие $n-1$ измерений и на этом многообразии задать значение искомого решения (в случае $n = 2$ в п. 1 задавалась кривая γ_1). Пусть это многообразие (обозначим его тоже γ_1) задается параметрически (через параметры $s_1, \ldots, s_{n-1}$) в виде $x_i = \omega_i(s_1, \ldots, s_{n-1})$ $(i = 1, \ldots, n)$ и искомое решение на нем задается также как функция параметров $s_1, \ldots, s_{n-1}$:

$$u|_{\gamma_1} = \omega(s_1, \ldots, s_{n-1}) \tag{8.26}$$

(начальная задача, или задача Коши).

Пусть известны $n-1$ независимых первых интегралов φ_i. Имеем

$$\varphi_i|_{\gamma_1} = \varphi_i\big(\omega_1(s_1, \ldots, s_{n-1}), \ldots, \omega_n(s_1, \ldots, s_{n-1})\big).$$

Обозначим

$$\xi_i = \varphi_i\big(\omega_1(s_1, \ldots, s_{n-1}), \ldots, \omega_n(s_1, \ldots, s_{n-1})\big), \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Предположим, что эта система $n-1$ уравнений с $n-1$ неизвестными $s_1, \ldots, s_{n-1}$ разрешима относительно $s_1, \ldots, s_{n-1}$, так что

$s_i = \Omega_i(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Тогда решением поставленной задачи будет

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \omega\big[\Omega_1\big(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)\big), \ldots$$
$$\ldots, \Omega_{n-1}\big(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)\big)\big]. \quad (8.27)$$

Действительно, это выражение является решением уравнения (8.4), так как содержится в формуле (8.25) (см. замечание к теореме 8.3). Кроме того, учитывая, что $\varphi_i|_{\gamma_1} = \xi_i$, получим

$$u|_{\gamma_1} = \omega\big[\Omega_1(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}), \ldots, \Omega_{n-1}(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})\big] = \omega(s_1, \ldots, s_{n-1}),$$

т. е. удовлетворяется условие (8.26).

Исследованием вопросов однозначной или неоднозначной разрешимости задачи (8.26) мы в общем виде заниматься не будем. Для $n = 2$ это было сделано выше, в п. 1.

§ 2. Квазилинейное уравнение

Обратимся к изучению уравнения (8.3):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = a(x_1, \ldots, x_n, u). \quad (8.28)$$

Будем предполагать, что a_i $(i = 1, \ldots, n)$ и a являются дифференцируемыми функциями своих аргументов $x_1, \ldots, x_n, u$ в некоторой области D $(n+1)$-мерного пространства переменных $x_1, \ldots, x_n, u$.

Решением уравнения (8.28) будем называть любую функцию от аргументов $x_1, \ldots, x_n$, обладающую частными производными по этим аргументам и обращающую уравнение (8.28) в тождество. Как и в случае линейного уравнения, это решение можно геометрически интерпретировать как поверхность в пространстве $x_1, \ldots, x_n, u$.

1. Общее решение и начальная задача. Сопоставим уравнению (8.28) следующее линейное уравнение:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial v}{\partial x_i} + a(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial v}{\partial u} = 0. \quad (8.29)$$

Теорема 8.4. *Пусть* $v = V(x_1, \ldots, x_n, u)$ — *решение уравнения* (8.29). *Пусть уравнение* $V(x_1, \ldots, x_n, u) = 0$ *определяет в области* D *переменных* $x_1, \ldots, x_n$ *некоторую дифференцируемую функцию* $u=\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *и пусть* $\frac{\partial V}{\partial u}|_{u=\varphi} \neq 0$ *в* G. *Тогда* $u=\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *является решением уравнения* (8.28).

Доказательство. По теореме о неявной функции

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \Big/ \frac{\partial V}{\partial u}$$

и тем самым левая часть уравнения (8.28) равна

$$-\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \Big/ \frac{\partial V}{\partial u},$$

а это в силу (8.29) есть $a(x_1, \ldots, x_n, \varphi)$, т. е. уравнение (8.28) удовлетворяется.

Доказанная теорема и результаты предыдущего параграфа приводят к следующему способу построения решений уравнения (8.28). Нужно написать систему уравнений, определяющую характеристики линейного уравнения (8.29):

$$\frac{dx_1}{a_1} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{a}. \tag{8.30}$$

Интегральные кривые системы (8.30), т. е. характеристики линейного уравнения (8.29), мы будем называть *характеристиками квазилинейного уравнения* (8.28). Если уравнение (8.29) удовлетворяет условиям, наложенным на линейное уравнение в § 1, то эти характеристики заполняют область D переменных $x_1, \ldots, x_n, u$, так что через каждую точку D проходит одна и только одна характеристика. Далее, по формуле (8.25) строим общее решение уравнения (8.29) (только теперь независимых интегралов будет n и они будут функциями $x_1, \ldots, x_n, u$):

$$v = \Psi\big(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_n, u)\big). \tag{8.31}$$

Затем, полагая $v = 0$, получим уравнение для определения множества решений уравнения (8.28):

$$\Psi\big(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_n, u)\big) = 0. \tag{8.32}$$

Замечание. Как было показано, формула (8.31) при достаточно общих предположениях содержит все решения уравнения (8.29).

Можно ли сказать, что формула (8.32) содержит все решения уравнения (8.28)? Проанализируем доказательство теоремы 8.4. При проверке тождества (8.28) мы использовали тождество (8.29), и нам достаточно, чтобы (8.29) было тождеством по $x_1, \ldots, x_n$ (при этом $u = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$). Однако при построении $V(x_1, \ldots, x_n, u)$ требуется большее, а именно, чтобы (8.29) было тождеством по $x_1, \ldots, x_n, u$. Поэтому априори не исключена возможность, что могут быть такие решения (8.28), для которых (8.29) удовлетворяется не тождественно по $x_1, \ldots, x_n, u$, а только при $u = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Такие решения, вообще говоря, не содержатся в формуле (8.32). Они называются *специальными* решениями. Можно показать, что специальное решение — случай исключительный, и в дальнейшем рассмотрении мы их принимать во внимание не будем.

В отличие от линейного случая в квазилинейном случае характеристики лежат не в пространстве $x_1, \ldots, x_n$, а в пространстве $x_1, \ldots, x_n, u$, и поэтому геометрический смысл характеристики здесь иной. Докажем следующий факт.

Теорема 8.5. *Всякая интегральная поверхность $u = f(x_1, ..., x_n)$ состоит из характеристик в том смысле, что через каждую точку этой поверхности проходит некоторая целиком лежащая на ней характеристика.*

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n))} = ... = \frac{dx_n}{a_n(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n))}, \tag{8.33}$$

или

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)), \tag{8.34}$$

определяющую кривые в пространстве $x_1, \ldots, x_n$. Возьмем одну из них: $x_i = x_i(t)$. В пространстве $x_1, \ldots, x_n, u$ ей будет отвечать кривая

$$x_i = x_i(t), \quad u = f(x_1(t), \ldots, x_n(t)),$$

которая по построению лежит на интегральной поверхности $u = f(x_1, \ldots, x_n)$. Докажем, что это — характеристика. Действительно, так как имеет место (8.33), то для доказательства того, что удовлетворяются уравнения (8.30), достаточно проверить, что $\frac{du}{dt} = a$. Но

$$\frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} a_i = a$$

в силу (8.28), чем и завершается доказательство.

Пусть интегральная поверхность нам неизвестна, но известны характеристики; тогда, если мы сумеем «склеить» из характеристик гладкую поверхность, то она будет интегральной поверхностью, так как вектор $\{a_1, \ldots, a_n, a\}$, касательный к характеристике, будет также касательным к поверхности, а следовательно, будет ортогональным к вектору $\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, -1\right\}$, нормальному к поверхности, а условие ортогональности как раз и означает выполнение уравнения (8.28).

Эти геометрические соображения приводят к следующему истолкованию формулы (8.32). Система уравнений (8.30) дает n-параметрическое семейство характеристик, которое можно, используя n первых интегралов, представить в виде

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n, u) = \theta_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{8.35}$$

Это семейство характеристик заполняет всю область D. Наша задача — выделить из этого множества $(n-1)$-мерное подмножество, которое будет образовывать интегральную поверхность. Для этого достаточно связать параметры $\theta_1, \ldots, \theta_n$, наложив произвольную достаточно гладкую связь вида

$$\Psi(\theta_1, \ldots, \theta_n) = 0. \tag{8.36}$$

Подставляя сюда (8.35), получим (8.32).

Эти же геометрические соображения дают возможность предложить следующую процедуру для решения задачи с дополнительным условием (задачи Коши), которая ставится следующим образом: через $(n-1)$-мерное многообразие Γ_1 в пространстве $x_1, \ldots, x_n, u$ провести интегральную поверхность. Это многообразие можно задать параметрически в виде

$$\begin{aligned} &x_i = \omega_i(s_1, \ldots, s_{n-1}), \quad i = 1, \ldots, n, \\ &u = \omega(s_1, \ldots, s_{n-1}). \end{aligned} \tag{8.37}$$

Таким образом, задача по существу та же, что и для линейного уравнения.

Теперь мы должны связь (8.36) наложить не произвольным образом, а исходя из (8.37). Для этого подставим (8.37) в (8.35):

$$\varphi_i\big(\omega_1(s_1, \ldots, s_{n-1}), \ldots, \omega(s_1, \ldots, s_{n-1})\big) = \theta_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

и, исключая отсюда $s_1, \ldots, s_{n-1}$, получим искомую связь (8.36), в которой Ψ будет уже, вообще говоря, вполне определенной функцией, а (8.32) будет давать решение задачи (8.37).

Не проводя в общем виде анализа того, какие особенности могут представиться при выполнении описанной процедуры, проследим это на трехмерном случае (подобно тому, как было сделано в § 1), которому отвечает уравнение

$$A(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}+B(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}=C(x,y,u). \tag{8.38}$$

Зададим Γ_1 (в трехмерном случае это кривая):

$$x=X(s),\quad y=Y(s),\quad u=U(s). \tag{8.39}$$

Выписываем систему (8.30), имеющую вид

$$\frac{dx}{A}=\frac{dy}{B}=\frac{du}{C},$$

и находим два первых интеграла $\varphi_i(x,y,u)$ $(i=1,2)$. Подставляя (8.39), получим

$$\varphi_i(X(s),Y(s),U(s))=\theta_i,\quad i=1,2. \tag{8.40}$$

Исключая из этих двух уравнений s, найдем связь

$$\Psi(\theta_1,\theta_2)=0. \tag{8.41}$$

Тем самым уравнение искомой поверхности будет

$$\Psi(\varphi_1(x,y,u),\varphi_2(x,y,u))=0. \tag{8.42}$$

Геометрический смысл процедуры очень простой: из каждой точки заданной кривой Γ_1 выпускается характеристика, и все такие характеристики в совокупности образуют искомую интегральную поверхность (рис. 25).

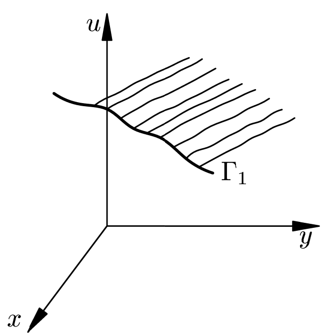

Рис. 25

Вместо представления (8.42) для интегральной поверхности, имеющего форму непосредственной связи между x, y, u, иногда удобно параметрическое представление, если в качестве параметров взять s и, скажем, x. Пусть, например, $C(x,y,u)=0$. Тогда один из первых интегралов равен u, другой — $\varphi_2(x,y,u)$ и искомую поверхность можно записать в виде

$$x=x,\quad u=U(s),\quad y=y(x,s), \tag{8.43}$$

где $y(x, s)$ определяется неявно уравнением

$$\varphi_2(x, y, U(s)) = \varphi_2(X(s), Y(s), U(s)).$$

Это последнее уравнение дает проекцию на плоскость (x, y) характеристики, проходящей через точку s заданной кривой Γ_1, а $u = U(s)$ дает значение апликаты u над этой проекцией.

При выполнении процедуры, приводящей к (8.42), может представиться особый случай, а именно, левые части обоих уравнений (8.40) могут обратиться в константы и (8.40) примет вид

$$\theta_i = c_i = \mathrm{const}\,. \tag{8.44}$$

В этом случае связь (8.41) также имеет место, но содержит большую степень произвола, а именно, Ψ может быть любой функцией, лишь бы $\Psi(c_1, c_2) = 0$. Например, можно положить

$$\Psi(\theta_1, \theta_2) = \Phi(\theta_1, \theta_2) - \Phi(c_1, c_2),$$

где Φ — уже произвольная функция двух аргументов.

Равенство (8.44) означает, что Γ_1 является характеристикой, и, таким образом, через характеристику можно провести бесконечно много интегральных поверхностей.

Пример 8.4. Рассмотрим уравнение переноса (1.30) из гл. 1, в котором v — постоянная,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t)u = 0$$

с условием (1.32), где положим $x_0 = 0$,

$$u(0, t) = u_0(t).$$

В этом случае (8.30) имеет вид

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{v} = -\frac{du}{c(x, t)u}.$$

Отсюда сразу находим один из первых интегралов: $\varphi_1 = x - vt$. Далее имеем

$$\frac{du}{dt} = -c(x, t)u = -c(\varphi_1 + vt, t)u = b(t, \varphi_1)u,$$

откуда $u = \mathrm{const}\, e^{b_1(t, \varphi_1)}$, где b_1 — одна из первообразных от b (напомним, что $\varphi_1 = \mathrm{const}$). Таким образом, другой первый интеграл имеет вид

$$\varphi_2 = ue^{-b_1(t, x - vt)}.$$

При $x = 0$ имеем (8.40):

$$\theta_1 = -vt, \quad \theta_2 = u_0(t)e^{-b_1(t,-vt)}.$$

Отсюда находим связь (8.41):

$$\theta_2 = u_0\Big(-\frac{\theta_1}{v}\Big)e^{-b_1\left(-\frac{\theta_1}{v},\theta_1\right)},$$

и формула (8.42) дает

$$ue^{-b_1(t,x-vt)} = u_0\Big(t - \frac{x}{v}\Big)e^{-b_1\left(t-\frac{x}{v},x-vt\right)}.$$

Можно найти также явное выражение для $u(x,t)$:

$$u = u_0\Big(t - \frac{x}{v}\Big)e^{b_1(t,x-vt)-b_1\left(t-\frac{x}{v},x-vt\right)}.$$

Пример 8.5. Линейное уравнение можно трактовать как квазилинейное. При этом $a = 0$ и заведомо одним из первых интегралов является u. Это соответствует установленному в § 1 факту, что вдоль характеристики $u = \text{const}$ (теорема 8.1).

Рассмотрим уравнение

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{8.45}$$

и решим его «квазилинейным» способом. Соответствующая система (8.30) дает два первых интеграла: $\varphi_1 = u$, $\varphi_2 = x^2 + y^2$. Формула (8.32) дает $\Psi(u, x^2 + y^2) = 0$, откуда $u = \psi(x^2 + y^2)$. Таким образом, решением уравнения (8.45) является произвольная гладкая поверхность вращения.

Рассмотрим теперь различные дополнительные условия:

А. Γ_1 — прямая линия, $x = s$, $y = s$, $u = s$. Описанный прием дает $\theta_1 = s$, $\theta_2 = 2s^2 \Rightarrow \theta_2 = 2\theta_1^2$, и решением задачи будет $x^2+y^2 = 2u^2$ — конус.

Б. Γ_1 — окружность: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $u = 1$. Таким образом, Γ_1 является характеристикой уравнения (8.45), рассматриваемого как квазилинейное уравнение. В данном случае имеем $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 1$, и решением будет поверхность вида $\Phi(u, x^2+y^2) - \Phi(1,1) = 0$. Геометрически ясно, что через заданную окружность действительно можно провести бесконечно много поверхностей вращения.

В. Рассматривая (8.45) как линейное уравнение, можно продемонстрировать случай, описанный в конце п. 1 § 1, когда решение задачи Коши не существует. Пусть γ_1 задана в виде $x = \cos t$, $y = \sin t$, а $u|_{\gamma_1} = t$. Любая поверхность вращения имеет постоянную аппликату на заданной окружности γ_1, и, таким образом, условие $u|_{\gamma_1} = t$ удовлетворено быть не может.

2. Понятие о разрывных решениях. Ударные волны. В настоящем пункте мы рассмотрим одно характерное для квазилинейных уравнений явление, которого не наблюдалось для линейного случая. Продемонстрируем это явление на простейшем примере квазилинейного уравнения в трехмерном пространстве (в переменных t, x, u), при этом положим $C(t, x, u) = 0$. Такой случай уже был описан в предыдущем пункте и на нем была продемонстрирована параметрическая форма записи (8.43) поверхности (8.42). В этом случае имеем два первых интеграла u и $\varphi_2(t, x, u)$, а семейство характеристик (8.35) имеет вид $u = \theta_1$, $\varphi_2(t, x, u) = \theta_2$. Проекции этих характеристик на плоскость (t, x), вообще говоря, могут пересекаться (в отличие от картины, изображенной на рис. 21, относящейся к линейному уравнению). Это приводит к следующему на первый взгляд парадоксальному результату.

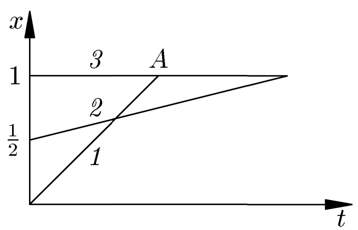

Рис. 26

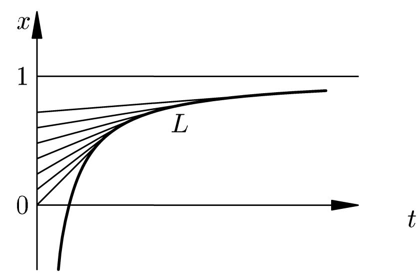

Рис. 27

Рассмотрим такой пример:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Зададим дополнительное условие $u(0, x) = u_0(x)$. В данном случае кривая Γ_1 — это $t = 0$, $x = s$, $u = u_0(s)$. Первыми интегралами будут u и $x - u^2 t$. Представление для искомой интегральной поверхности можно получить, пользуясь формулой (8.43). Оно имеет вид

$$t = t, \quad x = s + u_0^2(s)t, \quad u = u_0(s). \tag{8.46}$$

Уравнение $x = s + u_0^2(s)t$ описывает проекцию на плоскость (t, x) той характеристики, которая проходит через точку s кривой Γ_1, а $u_0(s)$ есть значение u над этой проекцией.

Зададим конкретно $u_0(s) = 1 - s$. Рассмотрим характеристику, проходящую через точку Γ_1, отвечающую $s = 0$. Ее проекция есть $x = t$ (прямая *1* на рис. 26). Точке $s = 1/2$ отвечает характеристика с проекцией $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}t$ (прямая *2*) и точке $s = 1$ — характеристика с проекцией $x = 1$ (прямая *3*). Над прямой *1* имеем $u = u_0(s) = 1$, над прямой *2* имеем $u = 1/2$ и над прямой *3* имеем $u = 0$. Но прямые *1, 2* и *3* пересекаются, и получается, что, например, в точке A значение апликаты искомой интегральной поверхности должно быть одновременно равно и нулю и единице (!).

Для того чтобы разъяснить этот кажущийся парадокс, найдем решение поставленной задачи в явном виде. Имеем $u = 1 - s$, $x = s + (1-s)^2 t$, откуда, исключая s, получим

$$u = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t(1-x)}}{2t} \tag{8.47}$$

(радикал берется со знаком «$-$», чтобы удовлетворялось условие $u(0, x) = 1 - x$.)

Из выражения (8.47) непосредственно видно, что решение определено левее гиперболы: $4t(1-x) = 1$ (рис. 27, кривая L). В точках гиперболы L подкоренное выражение обращается в нуль, а далее с ростом t становится отрицательным. Таким образом, в точках гиперболы решение перестает существовать. Заметим, что при этом $\dfrac{\partial u}{\partial x} \to \infty$. Нетрудно проверить, что на линии L условие $\dfrac{\partial V}{\partial u} \neq 0$, фигурирующее в теореме 8.4, нарушается.

Слева от гиперболы пересечения проекций характеристик не происходит и никакой «неоднозначности» в решении нет. Прямая $x = t$ «не доходит» до прямой $x = 1$, так как прямая $x = t$ сначала обязана пересечь гиперболу, а на ней решение перестает существовать.

Замечание. Гипербола L является местом пересечения бесконечно близких проекций, в данном случае огибающей семейства $x = s + (1-s)^2 t$. Ее можно найти, воспользовавшись s-дискриминантной кривой этого семейства.

То, что решение существует лишь в ограниченной области, можно наблюдать и для обыкновенных дифференциальных уравнений, но разобранный сейчас случай интересен тем, что он имеет непосредственную связь с рассмотренными физическими задачами.

Обратимся к задаче п. 4 § 2 гл. 1:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + p(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x). \tag{1.33}$$

Функция $p(u)$, которую можно получить экспериментально, имеет характер, представленный на рис. 28. Таким образом, физически интересный случай качественно не слишком сильно отличается от примера $p = u^2$, который только что был исследован. Естественно ожидать, что в рассматриваемой физической задаче решение перестает существовать на некоторой линии L, при этом обратится в бесконечность производная по x, подобно тому, как и в разобранном примере. Но ведь физически процесс имеет место и за линией L, т. е. для больших t. Возникает вопрос, каким же образом получить отвечающее данному физическому процессу решение, справедливое за линией L?

Для рассматриваемой задачи решение можно записать в виде, аналогичном (8.46):

$$t = t, \quad x = s + p[u_0(s)]t, \quad u = u_0(s). \tag{8.48}$$

Линию L можно найти так же, как и в примере, используя s-дискриминантную кривую, т. е. исключая s из системы

$$x = s + p[u_0(s)]t, \quad 0 = 1 + p'[u_0(s)]u_0'(s)t.$$

Кривую L удобно представить параметрически (опять через s) в виде

$$t = -\frac{1}{p'[u_0(s)]u_0'(s)}, \quad x = s - \frac{p[u_0(s)]}{p'[u_0(s)]u_0'(s)}.$$

Проекции характеристик в данном случае, как и в примере, представляют собой прямые, причем прямая, выходящая из точки $t = 0$, $x = s$, имеет наклон $p[u_0(s)]$. Пусть $u_0(s)$ убывает по s. Так как $p(u)$ возрастает по u (см. рис. 28), то наклон характеристики убывает с ростом s, т. е. характеристики «сходятся» к линии L, аналогично тому, как это изображено на рис. 27 для примера с $p = u^2$.

Если наблюдать процесс при фиксированном $x = x_0$, то при приближении t к t_0 (точка (t_0, x_0) лежит на L) $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ увеличивается, т. е. наблюдается резкое изменение плотности. Наблюдая физическое явление, можно в самом деле отметить в определенный момент времени резкое изменение плотности: через точку x_0 в момент t_0 проходит так называемая *ударная волна*. Затем процесс снова идет достаточно плавно, пока не образуется новая ударная волна, но может случиться также, что новой ударной волны не возникнет.

Как же описать процесс после прохождения ударной волны? Решение, определяемое как дифференцируемая функция, удовлетворяющая уравнению (8.38), дает возможность описать процесс только до возникновения ударной волны. Естественно, напрашивается мысль о расширении понятия решения уравнения (8.38). Мы будем искать решение в классе разрывных функций, подчиняя характер

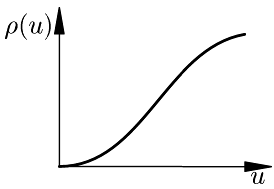

Рис. 28

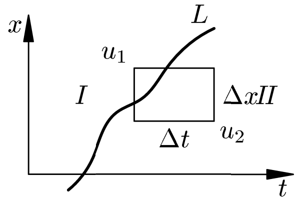

Рис. 29

разрыва определенным требованиям, соответствующим физической природе описываемого явления. Такое решение мы будем называть *обобщенным.*

Не задаваясь целью построить обобщенное (разрывное) решение для общего случая (8.38), рассмотрим, как оно строится для нашего физического примера.

Слева от кривой L (в области I) решение строится методом, описанным в п. 1; такое решение мы будем называть *классическим.* Далее, принимая L за проекцию некоторой новой начальной кривой, будем снова строить классическое решение методом п. 1. Вопрос заключается в том, какое значение u следует взять вдоль кривой L для построения этого решения.

Для выяснения этого вопроса мы используем физические соображения — все тот же закон сохранения количества вещества, который привел к дифференциальному уравнению (1.33).

Обозначим через u_1 предельное значение u на линии L (ее можно назвать линией разрыва), которое получено из классического решения, определенного начальными данными, т. е. предельное значение изнутри области I (до разрыва). Для построения следующего гладкого участка нам нужно найти предельное значение u_2 изнутри области II (после разрыва), которое примем за начальное для построения решения на следующем после разрыва этапе.

Уравнение баланса запишем с этой целью в следующем виде (учитывая, что $u(x,t) = u_1$, $u(x,t+\Delta t) = u_2$, $u(x-\Delta x,t) = u_2$; см. рис. 29, где изображен бесконечно малый прямоугольник, левая верхняя вершина которого лежит в области I бесконечно близко к линии L, а остальные в области II):

$$-(u_2 - u_1)\Delta x = [v(u_1)u_1 - v(u_2)u_2]\Delta t.$$

Переходя к пределу $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$ и учитывая, что $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ стремится к производной $\frac{dx}{dt}$ от функции, описывающей кривую L (эту производную естественно назвать скоростью движения разрыва $v_\text{р}$),

получим
$$v_{\mathrm{p}} = \frac{v(u_1)u_1 - v(u_2)u_2}{u_1 - u_2}. \tag{8.49}$$
Зная u_1 и v_{p}, можно по этой формуле определить u_2.

Зная u_2, можно снова построить гладкий участок решения до новой кривой типа L. Такой кривой может, однако, и не возникнуть. Мы уже видели выше, что возникновение первого разрыва было связано с тем, что характеристики «сходились». Второго разрыва не возникает, если после разрыва характеристики окажутся «расходящимися». Аналитически возникновение или отсутствие разрыва выясняется точно так же, как это делалось выше для решения (8.48).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Еругин Н.П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. — Изд. 2-е, перераб. и доп. — Минск: Наука и техника, 1972.

2. *Карташев А.П., Рождественский Б.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. — Изд. 3-е, перераб. и доп. — М.: Наука, 1986.

3. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Изд. 7-е. — М.: Изд-во моск. ун-та, 1984.

4. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Изд. 5-е. — М.: Наука, 1983.

5. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. — Изд. 8-е. — М:. Гостехиздат, 1959.

6. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.

7. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — Изд. 2-е. — М.: Наука, 1969.

Дополнительная литература

8. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1976.

9. *Бахвалов Н.С.* Численные методы: анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения. — Изд. 2-е, стереотип. — М.: Наука, 1975.

10. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974.

11. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973.

12. *Васильева А.Б., Тихонов Н.А.* Интегральные уравнения. — Изд. 2-е, стереотип. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

13. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. — М.: Изд-во МГУ, 1971.

14. *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разностные схемы. — М.: Наука, 1977.

15. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра. — Изд. 6-е, стереотип. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

16. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Ч. I. — Изд. 6-е, стереотип. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

17. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Ч. II. — Изд. 5-е, стереотип. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

18. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — Изд. 5-е. — М.: Наука, 1976.

19. *Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н.* Введение в нелинейную механику. — Киев: Изд-во АН УССР, 1937.

20. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.

21. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1977.

22. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. — Киев: Наукова думка, 1971.

23. *Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. — М.: Наука, 1975.

24. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. — Изд. 2-е. — М.–Л.: Гостехиздат, 1949.

25. *Самарский А.А.* Введение в численные методы. — М.: Наука, 1982.

26. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983.

27. *Смирнов В.И.*. Курс высшей математики. Т. III, ч. II. — Изд. 9-е, стереотип. — М.: Наука, 1974.

28. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. IV, ч. I. — Изд. 9-е, стереотип. — М.: Наука, 1974.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ